第11卷 第1期　　　　数 学 学 报　　　　Vol. 11, No. 1
1961 年 3 月　　　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　　　March, 1961

两层斜压模式*

石宗宝　　　王光寅
（湖南师范学院）　（中国科学院数学研究所）

§1. 問題的提出

在討論大气环流季节变化和长期預报时，須要用流体动力学和热力学的原理来討論大气运动的动力机制；而大气运动的根本原动力是由太阳、大气和地面之間的輻射作用通过大气动力学規律的活动而来的．輻射过程在时間和空間上分布的不均匀性支配了大气环流在时間和空間上的变化．考虑到輻射的根本作用，朱抱眞在研究大气环流季节变化和长期預报的問題时，提出了下列的流体力学模式[1]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_1\cdot\nabla\right)(f+\zeta_1)-\left(f\frac{w_2}{p_2}\right)_1=A_v\nabla^2\zeta_1, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_3\cdot\nabla\right)(f+\zeta_3)+\left(f\frac{w_2}{p_2}\right)_3=A_v\nabla^2\zeta_3-\frac{k}{2}(3\zeta_3-\zeta_1), \tag{2}$$

其中

$$\left(f\frac{w_2}{p_2}\right)_i=\Lambda^2\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_i\cdot\nabla\right)(\varphi_1-\varphi_3)-A_T\nabla^2(\varphi_1-\varphi_3)-\right.$$
$$\left.-B\left[C(\varphi_1-\varphi_3)^4+\gamma e^{-\gamma\lambda_0 p_2}W\right]\right\}, \tag{3}$$

$$V_i=\left(-\frac{1}{f}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y},\ \frac{1}{f}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right),\quad \zeta_i=\frac{1}{f}\nabla^2\varphi_i\quad(i=1,2),$$

其中 A_v, A_T, Λ, B, γ, λ_0, p_2 都是正常数，C 是負常数，W 是 (x, y, t) 的已知函数，$f(x, y)$ 是在所考虑的閉域 Ω 中异于零的有界函数，其一阶微商有界．这些参量和已知函数的物理意义在[1]中有詳細說明．

这个方程的重要之点在于：把大气的运动看作是太阳能的不断輸入和黏性、湍流、摩擦和炭体輻射不断消耗能量的結果，因此它是描写能量輸入和各种消耗与大气运动之間的关系的方程．

根据这个重要的特点，我們首先研究了各种能量之間的关系，即下面要讲的等式(10)．为了在这个錯綜复杂的关系中，揭示出主要的規律，我們将等式(10)的各項进行比較，分清主次，发現有以下几点情况：

1. 各种能量的消耗都是随时間的增大而积累的．在这各种消耗之中，黏性和湍流的消耗居于同等的地位；

2. 渦度傾向是直接反映动能变化的一項，而渦度平流对总动能的变化毫无影响；

3. 在考虑炭体輻射項时，我們注意到它是使系統消耗能量的因素；

* 1960 年 7 月 5 日收到．

4. 本文所提出的近似解法和 Ладыженская 在 [2] 中提出的方法类似，它有下列特点：

1) 它可以反映气象工作者的“波的尺度”的概念，大家知道，气象工作者所特别重視的是一定尺度的运动，而相当小的尺度的运动对大型天气的影响是不大的．所謂某种尺度的“波”的概念是理解为某种形式的簡单的运动．但是对非綫性系統來說，各种波（各种簡单的运动）是不能迭加的，因此要用簡单的运动来描写一个非綫性系統的（复杂的）运动，必須考慮到各种波之間的制約关系．本文提出的方法，用某个算子的固有函数来反映各种不同尺度的“波”的概念，并且考慮了这些波之間在整个非綫性系統中相互制約关系．从理論上証明了，小尺度运动对特定尺度内的运动的影响是逐漸減小的，因而証明了单独地近似的計算特定尺度内的运动的現实性．

2) 本文所提供的方法是将一个偏微分方程組的問題化为一个常微分方程組，值得注意的是：这个常微分方程組可从原偏微分方程組一次得到，因此在日常的計算工作中，只要計算常微分方程的解即可．

将(3)式分别代入(1)，(2)两式中，得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{f}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{f}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{f}\Delta\varphi_1-\Lambda^2(\varphi_1-\varphi_3)\right)-A_v\Delta\frac{1}{f}\Delta\varphi_1+$$
$$+A_T\Lambda^2(\varphi_1-\varphi_3)+\frac{\partial}{\partial y}\ln f\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\ln f\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-B_1(\varphi_1-\varphi_3)^4=$$
$$=G_1(x,y,t) \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{f}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{f}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{f}\Delta\varphi_3+\Lambda^2(\varphi_1-\varphi_3)\right)-A_v\Delta\frac{1}{f}\Delta\varphi_3-$$
$$-A_T\Lambda^2(\varphi_1-\varphi_3)+\frac{\partial}{\partial y}\ln f\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\ln f\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}+\frac{k}{2f}(3\Delta\varphi_3-\Delta\varphi_1)+$$
$$+B_1(\varphi_1-\varphi_3)^4=G_3(x,y,t), \tag{5}$$

其中

$$B_1=-BC\,\mathrm{sign}\,(\varphi_1-\varphi_3),\quad G_1=-B\gamma e^{-\gamma\lambda_0 p_2}w(x,y,t),$$
$$G_3=B\gamma e^{-\gamma\lambda_0 p_2}w(x,y,t).$$

这方程組是在 (x,y) 空間的某个有界域 Ω 和 $0<t<\infty$ 的拓扑积 $\Omega_t=(\Omega\times(0,\infty))$ 中考慮的，Ω_t 的边界記为 S.

初始高度場为

$$\varphi_1(x,y,0)=a_1(x,y),\quad \varphi_3(x,y,0)=a_3(x,y). \tag{6_1}$$

在边界 S 上，高度場及涡度場是需要預报的．但在 Ω 相当大时，边界 S 上的高度場及涡度場对 Ω 内影响不大的假定下，取作已知函数．經过适当代換可以把高度場及涡度場在边界 S 上化为零．方程組虽复杂了一些，但不改变其特征．从而取边界条件为

$$\varphi_i(x,y,t)|_S=\Delta\varphi_i(x,y,t)|_S=0\quad(i=1,3). \tag{6_2}$$

我們求出的高度場是在广义解的意义之下得到的，其定义如下：

函数 φ_1，φ_3 如果滿足下面的条件，則叫做本問題的广义高度場．

1) 在 $L_2(\Omega_t)$ 中有形如 $(\Delta\varphi_{it})_x$，$(\Delta\varphi_{it})_y$ 的广义微商及方程組中出現的一切低于它

們的广义微商.

2) φ_i 在 Ω_t 上是 x, y 的連續函数,对 t 满足 Lipschitz 条件.

3) 满足条件:

$$\varphi_i(x, y, 0) = a_i(x, y),$$
$$\varphi_i|_S = 0,$$
$$\Delta\varphi_i|_S = 0.$$

4) 有恒等式

$$\int_0^t\int_\Omega \Big\{\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{f}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{f}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(\frac{1}{f}\Delta\varphi_1 - \Lambda^2(\varphi_1 - \varphi_3)\Big) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\ln f\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\ln f\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - B_1(\varphi_1 - \varphi_3)^4 + A_T\Lambda^2 \\ \Delta(\varphi_1 - \varphi_3) - G_1\Big]\Phi - A_\nu\frac{1}{f}\Delta\varphi_1\Delta\Phi\Big\}\,dx\,dy\,dt = 0; \tag{7}$$

$$\int_0^t\int_\Omega \Big\{\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{f}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{f}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(\frac{1}{f}\Delta\varphi_3 + \Lambda^2(\varphi_1 - \varphi_3)\Big) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\ln f\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\ln f\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + B_1(\varphi_1 - \varphi_3)^4 - A_T\Lambda^2\Delta(\varphi_1 - \varphi_3) + \\ + \frac{k}{2f}(3\Delta\varphi_3 - \Delta\varphi_1) - G_3\Big]\Phi - A_\nu\frac{1}{f}\Delta\varphi_3\Delta\Phi\Big\}\,dx\,dy\,dt = 0, \tag{8}$$

其中 Φ 是满足下列条件的任意函数:

$$\Phi(x, y, t) \in L_2(\Omega_t)$$
$$\Delta\Phi \in L_2(\Omega_t)$$
$$\Phi|_S = 0.$$

§2. 能 量 分 析

本节用到 Hölder, Minkowski 不等式, С. Л. Соболев 的嵌入定理以及 О. А. Ладыженская 証明的不等式:

$$\int_\Omega u^4\,dx\,dy \leqslant C\int_\Omega u^2\,dx\,dy\int_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy,$$

$$\int_\Omega (u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\,dx\,dy \leqslant C_\Omega\int_\Omega (\Delta u)^2\,dx\,dy.$$

引理 1. 对满足方程組(4),(5)和条件$(6_1)(6_2)$的光滑解 φ_i 有下列不等式:

$$\frac{1}{2}\{\|\varphi_{1x}\|^2 + \|\varphi_{1y}\|^2 + \|\varphi_{3y}\|^2 + \Lambda^2\|\sqrt{f}(\varphi_1 - \varphi_3)\|^2\} + \frac{A_\nu}{2}\int_0^t[\|\Delta\varphi_1\|^2 + \\ + \|\Delta\varphi_3\|^2]\,dt + \frac{A_T\Lambda^2}{2}\int_0^t[\|\sqrt{f}(\varphi_1 - \varphi_3)_x\|^2 + \|\sqrt{f}(\varphi_1 - \varphi_3)_y\|^2]\,dt + \\ + \int_0^t\int_\Omega B_1 f(\varphi_1 - \varphi_3)^5\,dx\,dy\,dt \leqslant C_1, \tag{9}$$

其中 C_1 是一常数,与 φ_i 无关.

事实上，将(4)，(5)分别乘以 $f\varphi_1$, $f\varphi_3$，再在 Ω_t 上积分后相加，則有

$$\frac{1}{2}\{\|\varphi_{1x}\|^2+\|\varphi_{1y}\|^2+\|\varphi_{3x}\|^2+\|\varphi_{3y}\|^2+\Lambda^2\|\sqrt{f}(\varphi_1-\varphi_3)\|^2\}_0^t+$$

$$+A_\nu\int_0^t[\|\Delta\varphi_1\|^2+\|\Delta\varphi_3\|^2]\,dt+A_T\Lambda^2\int_0^t[\|\sqrt{f}(\varphi_1-\varphi_3)_x\|^2+$$

$$+\|\sqrt{f}(\varphi_1-\varphi_3)_y\|^2]\,dt+\int_0^t\int_\Omega B_1 f(\varphi_1-\varphi_3)^5\,dx\,dy\,dt=$$

$$=-A_\nu\int_0^t\int_\Omega\left[2\frac{f_x}{f}(\varphi_{1x}\Delta\varphi_1+\varphi_{3x}\Delta\varphi_3)+2\frac{f_y}{f}(\varphi_{1y}\Delta\varphi_1+\varphi_{3y}\Delta\varphi_3)+\right.$$

$$\left.+\frac{f_{xx}+f_{yy}}{f}(\varphi_1\Delta\varphi_1+\varphi_3\Delta\varphi_3)\right]dx\,dy\,dt-$$

$$-A_T\Lambda^2\int_0^t\int_\Omega[f_x(\varphi_1-\varphi_3)_x+f_y(\varphi_1-\varphi_3)_y](\varphi_1-\varphi_3)\,dx\,dy\,dt-$$

$$-\int_0^t\int_\Omega f(G_1\varphi_1+G_3\varphi_3)\,dx\,dy\,dt-\frac{k}{2}\int_0^t\int_\Omega(3\Delta\varphi_3\varphi_3-\Delta\varphi_1\varphi_3)\,dx\,dy\,dt. \quad (10)$$

可以得到

$$\frac{1}{2}\{\|\varphi_{1x}\|^2+\|\varphi_{1y}\|^2+\|\varphi_{3x}\|^2+\|\varphi_{3y}\|^2+\Lambda^2\|\sqrt{f}(\varphi_1-\varphi_3)\|^2\}+$$

$$+\frac{A_\nu}{2}\int_0^t[\|\Delta\varphi_1\|^2+\|\Delta\varphi_3\|^2]\,dt+\frac{A_T\Lambda^2}{2}\int_0^t[\|\sqrt{f}(\varphi_1-\varphi_3)_x\|^2+$$

$$+\|\sqrt{f}(\varphi_1-\varphi_3)_y\|^2]\,dt+\int_0^t\int_\Omega B_1 f(\varphi_1-\varphi_3)^5\,dx\,dy\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\alpha_1+B_1\int_0^t[\|\varphi_{1x}\|^2+\|\varphi_{1y}\|^2+\|\varphi_{3x}\|^2+\|\varphi_{3y}\|^2+\Lambda^2\|\sqrt{f}(\varphi_1-\varphi_3)\|^2]\,dt,$$

其中 α_1, B_1 是正常数，进而引理 1 得証.

在建立不等式时，作一项为例：

$$\left|\frac{k}{2}\int_0^t\int_\Omega(3\Delta\varphi_3\varphi_3-\Delta\varphi_1\varphi_3)\,dx\,dy\,dt\right|\leqslant\frac{k}{4}\left\{\varepsilon\int_0^t[\|\Delta\varphi_1\|^2+\|\Delta\varphi_3\|^2]\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{C_\Omega}{\varepsilon}\int_0^t\sqrt{\int_\Omega\varphi_3^4\,dx\,dy}\,dt\right\}\leqslant\frac{k}{4}\left\{\varepsilon\int_0^t[\|\Delta\varphi_1\|^2+\|\Delta\varphi_3\|^2]\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{C_\Omega}{\varepsilon}\int_0^t[\|\varphi_{3x}\|^2+\|\varphi_{3y}\|^2]\,dt\right\},$$

只要取 $\varepsilon>0$ 充分小时，第一項可以与左端有黏性系数 A_ν 項部分抵消.

方程組乘以 $f\varphi_i$ 的作用是使非綫性項丧失影响，使含有 t 的微商項，在使用分部积分时消除了困难.

引理 2. 本問題的光滑解 φ_i 有下列不等式：

$$\frac{1}{2}\left\{\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_1\right\|^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_3\right\|^2+\Lambda^2\|(\varphi_1-\varphi_3)_x\|^2+\Lambda^2\|(\varphi_1-\varphi_3)_y\|^2\right\}+$$

$$+\frac{A_\nu}{2}\int_0^t\left[\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_1)_x\right\|^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_1)_y\right\|^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_3)_x\right\|^2+\right.$$

$$+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_3)_y\right\|^2\Big]dt+\frac{A_T\Lambda^2}{2}\int_0^t\|\Delta(\varphi_1-\varphi_3)\|^2dt+$$

$$+4\int_0^t\int_\Omega B_1(\varphi_1-\varphi_3)^3[(\varphi_1-\varphi_3)_x^2+(\varphi_1-\varphi_3)_y^2]\,dx\,dy\,dt\leqslant C_2, \tag{11}$$

其中 C_2 是与 φ_i 无关的常数.

将(4), (5)式分别乘以 $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_3$, 对 Ω_t 积分, 相加后得到

$$\frac{1}{2}\left\{\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_1\right\|^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_3\right\|^2+\Lambda^2\|(\varphi_1-\varphi_3)_x\|^2+\Lambda^2\|(\varphi_1-\varphi_3)_y\|^2\right\}_0^t+$$

$$+A_v\int_0^t\left[\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_1)_x\right\|^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_1)_y\right\|^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_3)_x\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_3)_y\right\|^2\right]dt+A_T\Lambda^2\int_0^t\|\Delta(\varphi_1-\varphi_3)\|^2dt+$$

$$+4\int_0^t\int_\Omega B_1(\varphi_1-\varphi_3)^3[(\varphi_1-\varphi_3)_x^2+(\varphi_1-\varphi_3)_y^2]\,dx\,dy\,dt=$$

$$=A_v\int_0^t\int_\Omega\left[f_x\left(\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_1)_x\cdot\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_1+\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_3)_x\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_3\right)+\right.$$

$$\left.+f_y\left(\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_1)_y\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_1+\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_3)_y\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_3\right)\right]dx\,dy\,dt-$$

$$-\int_0^t\int_\Omega\left[\frac{f_y}{f}(\varphi_{1x}\Delta\varphi_1+\varphi_{3x}\Delta\varphi_3)-\frac{f_x}{f}(\varphi_{1y}\Delta\varphi_1+\varphi_{3y}\Delta\varphi_3)\right]dx\,dy\,dt+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega(G_1\Delta\varphi_1+G_3\Delta\varphi_3)\,dx\,dy\,dt-\frac{k}{2}\int_0^t\int_\Omega\frac{1}{f}[3(\Delta\varphi_3)^2-\Delta\varphi_1\Delta\varphi_3]\,dx\,dy\,dt-$$

$$-\Lambda^2\int_0^t\int_\Omega\frac{1}{f}[(\varphi_{1x}\varphi_{3y}-\varphi_{1y}\varphi_{3x})\Delta\varphi_1+(\varphi_{3x}\varphi_{1y}-\varphi_{3y}\varphi_{1x})\Delta\varphi_3]\,dx\,dy\,dt.$$

仿照引理 1 的方法, 可以証得引理 2, 不过最后一項的不等式建立較为周折, 如

$$\left|\Lambda^2\int_0^t\int_\Omega\frac{1}{f}(\varphi_{1x}\varphi_{3y}-\varphi_{1y}\varphi_{3x})\Delta\varphi_1\,dx\,dy\,dt\right|\leqslant\beta\left\{\int_0^t\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_1\right\|^2dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\int_\Omega(\varphi_{1x}^2\varphi_{3y}^2+\varphi_{1y}^2\varphi_{3x}^2)\,dx\,dy\,dt\right\}\leqslant\beta\left\{\int_0^t\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_1\right\|^2dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\sqrt{\int\!\!\int\varphi_{1x}^4\,dx\,dy}\sqrt{\int_\Omega\varphi_{3y}^4\,dx\,dy}\,dt+\int_0^t\sqrt{\int_\Omega\varphi_{1y}^4\,dx\,dy}\sqrt{\int_\Omega\varphi_{3x}^4\,dx\,dy\,dt}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\beta^*\left\{\int_0^t\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_1\right\|^2dt+\int_0^t[\|\varphi_{1x}\|\cdot\|\varphi_{3y}\|+\|\varphi_{1y}\|\cdot\|\varphi_{3x}\|]\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_1\right\|\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_3\right\|dt\right\}\leqslant\beta_1^*\left\{\int_0^t\left[\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_1\right\|^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_3\right\|^2\right]dt\right\}.$$

方程組乘以 $\Delta\varphi_i$, 而不是乘以 $f\Delta\varphi_i$. 原因是: 含有 t 的微商項不再施行分部积分, 且 f 与 t 无关. 要消除非綫性項的影响乘以 $\Delta\varphi_i$ 是最佳途径.

先将方程对 t 微商, 再分别两次用 $f\varphi_{it}$ 及 $\Delta\varphi_{it}$ 来乘, 应用与引理 1, 2 相同的思路和类似的方法, 証得

引理 3. 本問題的光滑解 φ_i 有不等式

$$\frac{1}{2}\{\|\varphi_{1tx}\|^2+\|\varphi_{1ty}\|^2+\|\varphi_{3tx}\|^2+\varphi_{3ty}\|^2+\Lambda^2\|\sqrt{f}(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})\|^2\}+$$
$$+\frac{A_\nu}{2}\int_0^t[\|\Delta\varphi_{1t}\|^2+\|\Delta\varphi_{3t}\|^2]\,dt+\frac{A_T\Lambda^2}{2}\int_0^t[\|\sqrt{f}(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})_x\|^2+$$
$$+\|\sqrt{f}(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})_y\|^2]\,dt+4\int_0^t\int_\Omega B_1(\varphi_1-\varphi_3)^3(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})^2\,dx\,dy\,dt\leqslant C_3, \tag{12}$$

其中 C_3 是与 φ_i 无关的常数.

引理 4. 在引理 3 的同样条件下,有

$$\frac{1}{2}\left\{\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_{1t}\right\|^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_{3t}\right\|^2+\Lambda^2\|(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})_x\|^2+\Lambda^2\|(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})_x\|^2\right\}+$$
$$+\frac{A_\nu}{2}\int_0^t\left[\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_{1t})_x\right\|^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_{1t})_y\right\|^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_{3t})_x\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}(\Delta\varphi_{3t})_y\right\|^2\right]dt+\frac{A_T\Lambda^2}{2}\int_0^t\|\Delta(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})\|^2\,dt\leqslant C_4. \tag{13}$$

其中 C_4 是与 φ_i 无关的常数.

最后,特别注意到: $\|\varphi_{1tx}\|^2$, $\|\varphi_{1ty}\|^2$, $\|\varphi_{3tx}\|^2$, $\|\varphi_{3ty}\|^2$, $\|\sqrt{f}(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})\|^2$, $\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_{1t}\right\|^2$, $\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_{3t}\right\|^2$, $\|(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})_x\|^2$, $\|(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})_y\|^2$ 在 $t=0$ 时的有界性是通过下述結果得到的.

当 $t=0$ 时, (4), (5) 式則有

$$\left[\frac{1}{f}\Delta\varphi_{1t}-\Lambda^2(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})\right]_{t=0}=-\left\{\left(\frac{1}{f}a_{1x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{f}a_{1y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{f}\Delta a_1-\right.\right.$$
$$\left.-\Lambda^2(a_1-a_3)\right)-A_\nu\Delta\frac{1}{f}\Delta a_1+A_T\Lambda^2(a_1-a_3)+\frac{\partial}{\partial y}\ln f a_{1x}-$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}\ln f a_{1y}-B_1(a_1-a_3)^4-G_1\right\},$$

$$\left[\frac{1}{f}\Delta\varphi_{3t}+\Lambda^2(\varphi_{1t}-\varphi_{3t})\right]_{t=0}=-\left\{\left(\frac{1}{f}a_{3x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{f}a_{3y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{f}\Delta a_3+\right.\right.$$
$$\left.+\Lambda^2(a_1-a_3)\right)-A_\nu\Delta\frac{1}{f}\Delta a_3-A_T\Lambda^2(a_1-a_3)+\frac{\partial}{\partial y}\ln f a_{3x}-$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}\ln f a_{3y}+B_1(a_1-a_3)^4+\frac{k}{2f}(3\Delta a_3-\Delta a_1)-G_3\right\}.$$

将等式两端平方,两式相加,再对 Ω 积分,由于右端的有界性可以导出

$$\left[\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_{1t}\right\|^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\Delta\varphi_{3t}\right\|^2+\|\varphi_{1t}-\varphi_{3t}\|^2\right]_{t=0}$$

的有界性.

§ 3. 高度場的連續性的証明

我們用 Галеркин 方法証明高度場是存在的.为此, 記(4), (5)为

$$L_1\varphi_1 = 0, \tag{14}$$

$$L_3\varphi_3 = 0. \tag{15}$$

在 $L_2(\Omega)$ 中取下面 Laplace 算子的固有函数为基底 $\{\psi_k(x, y)\}$

$$\begin{cases}\Delta\psi_k = -\lambda_k^2 f\psi_k,\\ \psi_k|_s = 0,\end{cases}$$

且 $\{\psi_k\}$ 是正規正交的. 取近似高度場为

$$\varphi_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_{kn}^{(i)}(t)\psi_k(x, y) \quad (i = 1, 3), \tag{16}$$

其中 $C_{kn}^{(i)}(t)$ 是由

$$(fL_i\varphi_i^{(n)}, \psi_k) = 0^{1)} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{17}$$

和

$$C_{kn}^{(i)}(0) = (a_i, \psi_k) \qquad (k \leqslant n)$$

所确定,也就是常微分方程組的始値問題的解:

$$\begin{cases}\dfrac{dC_{kn}^{(i)}(t)}{dt} = f_k(C_{kn}^{(i)}) \mp BC\displaystyle\int_\Omega \operatorname{sign}(\varphi_1^{(n)} - \varphi_3^{(n)})(\varphi_1^{(n)} - \varphi_3^{(n)})^4\psi_k\,dx\,dy,\\ C_{kn}^{(i)}(t)|_{t=0} = C_{kn}^{(i)}(0),\end{cases} \tag{18}$$

其中 f_k 是 $C_{kn}^{(i)}$ 的解析函数,右端第二項当 $i = 1$ 时取正号; $i = 3$ 时取負号.

注意到,常微分方程組右端是 $C_{kn}^{(i)}$ 的連續函数. 因为

$$\operatorname{sign}(\varphi_1^{(n)} - \varphi_3^{(n)})(\varphi_1^{(n)} - \varphi_3^{(n)})^4$$

是 $C_{kn}^{(i)}$ 的連續函数. 当 $|C_{kn}^{(i)}| \leqslant M$ 时,方程組右端亦为有界且仅与 M 有关.

其次,由于

$$\operatorname{sign}(\varphi_1^{(n)} - \varphi_3^{(n)})(\varphi_1^{(n)} - \varphi_3^{(n)})$$

的左、右微商存在且其絕对値等于

$$\left|\frac{\partial}{\partial C_{kn}^{(i)}}(\varphi_1^{(n)} - \varphi_3^{(n)})\right|,$$

故有界,則方程組右端对 $C_{kn}^{(i)}$ 滿足 Lipschitz 条件.

从而知道問題(15)有唯一的解存在. 剩下須要証明解 $C_{kn}^{(i)}(t)$ 是大范围存在,即 $t \geqslant 0$ 有解. 为此,将(14)式两端乘以 $C_{kn}^{(i)}(t)$, 对 k 从 1 加到 n, 再对 t 从 0 到 t 积分,則有

$$\int_0^t (fL_i\varphi_i^{(n)}, \varphi_i^{(n)})\,dt = 0.$$

利用 § 1 中同样的方法,即可得到类似引理 1 的結果.

因此,导出

$$\|\varphi_i^{(n)}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (C_{kn}^{(i)})^2 \leqslant C.$$

从上述知道 $\dfrac{dC_{kn}^{(i)}}{dt}$ 是一致有界的,且滿足 Lipschitz 条件,因此, $C_{kn}^{(i)}(t)$ 及 $\dfrac{dC_{kn}^{(i)}(t)}{dt}$

---

1) $(fL_i\varphi_i^{(n)}, \psi_k)$ 表内积 $\int_\Omega fL_i\varphi_i^{(n)}\psi_k\,dx\,dy$.

是 t 的等度連續函数. 故当 $n\to\infty$ 时, $C_{kn}^{(i)}(t)$, $\frac{dC_{kn}^{(i)}(t)}{dt}$ 是一致收斂的.

将(14)式两端乘以 $-\lambda_k^2 C_{kn}^{(i)}(t)$, 对 k 从 1 加到 n, 对 t 积分,則有

$$\int_0^t \left(fL_i\varphi_i^{(n)}, \frac{\Delta\varphi_i^{(n)}}{f}\right) dt = 0.$$

从而,得到类似引理 2 的結果.

(14)式先对 t 微分, 再先后两次分別乘以 $\frac{dC_{kn}^{(i)}}{dt}$ 及 $-\lambda_k^2\frac{dC_{kn}^{(i)}}{dt}$, 对 k 相加, 对 t 积分, 則有

$$\int_0^t (fL_i\varphi_{it}^{(n)}, \varphi_{it}^{(n)})\, dt = 0,$$

$$\int_0^t \left(fL_i\varphi_i^{(n)}, \frac{\Delta\varphi_{it}^{(n)}}{f}\right) dt = 0.$$

相仿得到引理 3, 4 的估計式.

由于类似引理 1—4 估計式的得到,并应用嵌入定理,得到如下的結果:

1) $(\Delta\varphi_i^{(n)})_x$, $(\Delta\varphi_i^{(n)})_y$; $(\Delta\varphi_{it}^{(n)})_x$, $(\Delta\varphi_{it}^{(n)})_y$ 在 $L_2(\Omega_t)$ 中是弱收斂的.

2) $\Delta\varphi_i^{(n)}$, $\Delta\varphi_{it}^{(n)}$ 在 $L_2(\Omega)$ 中对 t 是一致的弱收斂.

3) φ_i, φ_{ix}, φ_{iy}; φ_{it}, φ_{itx}, φ_{ixy} 在 $L_2(\Omega)$ 中是对 t 一致的強收斂.

从而,得到当 $n\to\infty$ 时, $\varphi_i^{(n)}$ 的极限 φ_i 是 x, y 的連續函数, 对 t 滿足 Lipschitz 条件.

現在証明 φ_i 是本問題的广义高度場.

設 Φ 的近似式是

$$\Phi^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} d_k(t)\psi_k(x, y).$$

将(17)式两端乘以 $\frac{1}{f}$, 对四阶項施用两次分部积分化为提法中的类似形式(7),(8);不过还沒有对 t 积分,而且 Φ 代为 ψ_k 而已. 再乘以 $d_k(t)$, 对 k 从 1 加到 n, 再对 t 积分,則得到(7),(8) 两式;不过是 Φ 代为 $\Phi^{(m)}(m\leqslant n)$, φ_i 代为 $\varphi_i^{(n)}$. 今将 $\Phi^{(m)}$ 固定,当 $n\to\infty$ 时, 由于本节中得到了 1)—3) 的結果,即可証明对 $\Phi^{(m)}$ 恆等式(7), (8)是成立的. 由 $\Phi^{(m)}$ 的弱收斂性(在 Ω_t 上),最后証得提法中 4° 的恆等式成立. 故有

定理. 本問題(4),(5),(6)有唯一的广义高度場 φ_1, φ_2 在 Ω_t 上存在. φ_1, φ_3 是 x, y 的連續函数,对 t 滿足 Lipschitz 条件.

§ 4. 高度場的确定性、稳定性及近似高度場的誤差估計

設有两組高度場 $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_3^{(1)}$; $\varphi_1^{(2)}$, $\varphi_3^{(2)}$. 記 $u=\varphi_1^{(1)}-\varphi_1^{(2)}$, $v=\varphi_3^{(1)}-\varphi_3^{(2)}$, 将此两組高度場代入(4),(5)式中,对应式相减, 得到了两个 u, v 与两組高度場的关系式. 第一式乘以 fu, 第二式乘以 fv, 对 Ω_t 积分,再相加得到

$$I = \frac{1}{2}\{\|u_x\|^2 + \|u_y\|^2 + \|v_x\|^2 + \|v_y\|^2 + \Lambda^2\|\sqrt{f}(u-v)\|^2\} + A_v\int_0^t [\|\Delta u\|^2 +$$

$$+ \|\Delta v\|^2]\, dt + A_T\Lambda^2\int_0^t [\|\sqrt{f}(u-v)_x\|^2 + \|\sqrt{f}(u-v)_y\|^2]\, dt =$$

$$= A_v \int_0^t \int_\Omega \left[\frac{2f_x}{f} (\Delta u \cdot u_x + \Delta v \cdot v_x) + \frac{2f_y}{f} (\Delta u \cdot u_y + \Delta v \cdot v_y) + \right.$$

$$\left. + \frac{f_{xx} + f_{yy}}{f} (\Delta u \cdot u + \Delta v \cdot v) \right] dx\,dy\,dt + \int_0^t \int_\Omega \frac{1}{f} \left[\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} \Delta u \frac{\partial u}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial y} \Delta u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial x} \Delta v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial y} \Delta v \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx\,dy\,dt +$$

$$+ \Lambda^2 \int_0^t \int_\Omega \left[\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial (u-v)}{\partial y} u - \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial (u-v)}{\partial x} u + \frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial (u-v)}{\partial x} v - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial (u-v)}{\partial y} v \right] dx\,dy\,dt + \int_0^t \int_\Omega B_1 [(\varphi_1^{(1)} - \varphi_3^{(1)})^4 -$$

$$- (\varphi_1^{(2)} - \varphi_3^{(2)})^4] f (u-v)\, dy\,dx\,dt.$$

可以得到

$$\frac{1}{2} I \leqslant \alpha_5 \int_0^t [\|u_x\|^2 + \|u_y\|^2 + \|v_x\|^2 + \|v_y\|^2]\, dt.$$

从而，导出 $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$，因为 $u|_s = v|_s = 0$，所以 $u = v = 0$.

根据 §2 的討論，設 (4)，(5)，(6) 的近似高度場为 $\varphi_i^{(n)}$. 記 $u = \varphi_1 - \varphi_1^{(n)}$，$v = \varphi_3 - \varphi_3^{(n)}$，并且当 $t = 0$ 时，$u_0 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} C_{kn}^{(1)}(0) \psi_k$，$v_0 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} C_{kn}^{(3)}(0) \psi_k$ 又假定

$$\frac{1}{2} \{\|u_{0x}\|^2 + \|u_{0y}\|^2 + \|v_{0x}\|^2 + \|v_{0y}\|^2 + \Lambda^2 \|\sqrt{f}(u_0 - v_0)\|\} = \varepsilon_0.$$

仿照前述步驟可以得到

$$\|u_x\|^2 + \|u_y\|^2 + \|v_x\|^2 + \|v_y\|^2 \leqslant \varepsilon_0 + \alpha_6 \int_0^t [\|u_x\|^2 + \|u_y\|^2 + \|v_x\|^2 + \|v_y\|^2]\, dt,$$

从而求出

$$\|u_x\|^2 + \|u_y\|^2 + \|v_x\|^2 + \|v_y\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon_0}{\alpha_6} (e^{\alpha_6 t} - 1) \leqslant \varepsilon^*. \quad t \in [0, T]$$

因此有

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 \leqslant C_\Omega \varepsilon^*,$$

其中 C_Ω 仅与 Ω 有关，故当 n 相当大时，$\|u\|$，$\|v\|$ 可以相当小；反之，亦成立.

設 a_i，G_i；a_i^*，G_i^* 的相应問題的高度場为 φ_1，φ_3；φ_1^*，φ_3^*. 記 $u = \varphi_1 - \varphi_1^*$，$v = \varphi_3 - \varphi_3^*$. 只要 $\|a_i - a_i^*\|$，$\|G_3 - G_3^*\|$ 相当小时，就可以导出 $\|u\|$，$\|v\|$ 也充分小，因而得到了稳定性.

附　　录

为了便于实际工作者的参考，我們列出計算步驟的提要.

首先根据气象工作者提出高度場的研究区域 Ω 的大小及边界 S 的形状，然后解問題

$$\begin{cases} \Delta \psi_k = -\lambda_k^2 f \psi_k, \\ \psi_k|_s = 0. \end{cases}$$

找出它的固有函数，构成正規正交系 $\{\psi_k\}$.

近似高度場（n 极近似）为

$$\varphi_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_{kn}^{(i)}(t)\psi_k(x, y).$$

n 的选择是由气象工作者所考慮的对象的尺度来决定．近似高度場表达式中的 $C_{kn}^{(i)}(t)$ 是如下确定的：

$$(fL_i\varphi_i^{(n)}, \psi_k) = 0 \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \cdots, n \\ i = 1, 3 \end{pmatrix}.$$

初始条件为

$$C_{kn}^{(i)}(0) = (a_i, \psi_k),$$

卽下列常微分方程組的 Cauchy 問題的解：

$$\begin{cases} \dfrac{dC_{kn}^{(i)}}{dt} = F_k(C_{kn}^{(i)}), \\ C_{kn}^{(i)}(0) = (a_i, \psi_k). \end{cases}$$

方程右端 F_k 中 $C_{kn}^{(i)}$ 的系数是由 (4)，(5) 式及基底 $\{\psi_k\}$ 所决定的．

参 考 文 献

[1] 朱抱眞，一个討論大气环流季节变化和长期预报的流体力学模式，气象学报，**29** (1958)，57—61．
[2] Ладыженская, О. А., Решение в целом задачи Коши для нестационарного плоского течения вязкой несжимаемой жидкости, Труды московского математического общества, **8** (1959), 71—81.

第11卷 第1期　　数 学 学 报　　Vol. 11, No. 1
1961年3月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　March, 1961

关於可递域的一个注記*

陸啓鏗　許以超
(中国科学院数学研究所)

設 $\mathfrak{R}_n$ 是 $n(n \geqslant 4)$ 个复变数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 空間中一域，定义为适合条件

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{2i}\left[\begin{pmatrix}z_1 & z_2\\z_2 & z_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\bar{z}_1 & \bar{z}_2\\\bar{z}_2 & \bar{z}_3\end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix}|z_4|^2 + |z_5|^2 + \cdots + |z_n|^2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} > 0 \tag{1}$$

的点集，其中左边是一个 Hermite 方陣，而 Hermite 方陣 $H > 0$ 是指 H 是定正的。

本文的目的就是要証明在 $n \geqslant 6$ 时域 $\mathfrak{R}_n$ 的 Riemann 曲率不全取負值。由此立知，在 $n \geqslant 6$ 时域 $\mathfrak{R}_n$ 是非对称域。此外还要証明域 $\mathfrak{R}_n$ 是不可約的，可递的，而且它解析等价于一个有界域。

为了簡单起見，今后我們記

$$Z = \begin{pmatrix}z_1 & z_2\\z_2 & z_3\end{pmatrix}, \qquad z = (z_4, z_5, \cdots, z_n). \tag{2}$$

于是域 $\mathfrak{R}_n$ 的定义条件(1)可改写为

$$I + \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) - \begin{pmatrix}z\bar{z}' & 0\\0 & 0\end{pmatrix} > 0,$$

其中 I 是 2×2 么方陣。

定理 1. 当 $n \geqslant 4$ 时域 $\mathfrak{R}_n$ 是一个可递域，它解析等价于一个有界域。

証. 我們首先来証明域 $\mathfrak{R}_n$ 解析等价于一个有界域。我們先証明当 $(Z, z) \in \mathfrak{R}_n$ 时 $\det(Z + 2iI) \neq 0$。今 $(Z, z) \in \mathfrak{R}_n$，即 $I + \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) - \begin{pmatrix}z\bar{z}' & 0\\0 & 0\end{pmatrix} > 0$。显然 $\begin{pmatrix}z\bar{z}' & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ 是半定正 Hermite 方陣，所以 $I + \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) > 0$。若 $\det(Z + 2iI) = 0$，即存在一个二維复向量 $a \neq 0$，使得 $(Z + 2iI)a' = 0$，亦即 $aZ = -2ia$，因此

$$a\left[I + \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z})\right]\bar{a}' = a\bar{a}' + \frac{1}{2i}aZ\bar{a}' - \frac{1}{2i}\overline{(aZ\bar{a}')}' = -a\bar{a}' < 0.$$

这和方陣 $I + \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) > 0$ 矛盾，所以 $\det(Z + 2iI) \neq 0$。

現在可以在域 $\mathfrak{R}_n$ 上引进解析变換

$$\begin{cases}W = Z(Z + 2iI)^{-1},\\ w = z\det(Z + 2iI)^{-1}.\end{cases} \tag{3}$$

今 $I - W = 2i(Z + 2iI)^{-1}$，所以 $I - W$ 是非异方陣，从而它有逆变換

$$\begin{cases}Z = 2iW(I - W)^{-1},\\ z = -4w\det(I - W)^{-1}.\end{cases} \tag{4}$$

* 1960年9月27日收到。

所以(3)是域 $\mathfrak{R}_n$ 上的解析同胚．它将域 $\mathfrak{R}_n$ 映为适合关系

$$(I-W)^{-1}(I-W\overline{W})(I-\overline{W})^{-1}-16\begin{pmatrix} w\overline{w}' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}|\det(I-w)|^{-2}>0 \tag{5}$$

的点 (W, w) 构成的域 $\mathfrak{R}_n^*$．我們断言 $\mathfrak{R}_n^*$ 是一个有界域．事实上，因为 $\begin{pmatrix} w\overline{w}' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 是一个半定正 Hermite 方陣，所以 $(I-W)^{-1}(I-W\overline{W})(\overline{I-W})^{-1}>0$，这就推出

$$I-W\overline{W}>0. \tag{6}$$

熟知适合关系(6)的二阶对称方陣 W 是第二类对称有界典型域 $\mathfrak{R}_{II}$ 中的点，所以我們証明了适合关系(5)的方陣 W 的所有元素变化都是有界的．因此，方陣 $I-W$ 的轉置伴随方陣

$$P=(I-W)^{-1}\det(I-W)$$

的所有元素变化也都是有界的．今(5)式可改写为

$$\frac{1}{16}P(I-W\overline{W})\overline{P}'>\begin{pmatrix} w\overline{w}' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

于是存在一个实常数 $a>0$，使得

$$a>w\overline{w}',$$

这也就証明了适合关系(5)的向量 w 的所有元素变化都是有界的．断言就得証．

其次我們来証明域 $\mathfrak{R}_n$ 上有解析自同胚：

$$\begin{cases} Z^*=\begin{pmatrix} a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\left[Z+i\begin{pmatrix} z_0\overline{z}_0'-2\overline{z}_0z' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+iI\right]\begin{pmatrix} a & 0\\ c & b\end{pmatrix}+L-iI,\\ z^*=a(z-z_0),\end{cases} \tag{7}$$

其中 $z_0=(z_1^{(0)}, z_3^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)})$ 是一个复常向量；a, b, c 都是实数且 $ab\neq 0$，又 L 是一个 2×2 实对称方陣．

显然这是一个解析变换，为了証明它是一一的．只要証明变换(7)的变换方陣非异就够了．今

$$J=\frac{\partial(z_1^*, z_2^*, \cdots, z_n^*)}{\partial(z_1, z_2, \cdots, z_n)}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ 2ac & ab & 0\\ c^2 & cb & b^2\end{pmatrix} & O^{(3,n-3)}\\ \begin{pmatrix} -2ia^2\overline{z}_1^{(0)} & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -2ia^2\overline{z}_n^{(0)} & 0 & 0\end{pmatrix} & aI^{(n-3)}\end{pmatrix},$$

于是

$$\det J=a^nb^3\neq 0, \tag{8}$$

即变换(7)是一一的．今

$$I+\frac{1}{2i}(Z^*-\overline{Z}^*)-\begin{pmatrix} z^*\overline{z}^{*\prime} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=I+\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\left[Z-\overline{Z}+2i\begin{pmatrix} z_0\overline{z}_0'-z_0\overline{z}'-z\overline{z}_0' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+2iI\right]\begin{pmatrix} a & 0\\ c & b\end{pmatrix}-$$

$$-I-a^2\begin{pmatrix}(z-z_0)(\overline{z-z_0})' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\left[I+\frac{1}{2i}(Z-\bar{Z})-\begin{pmatrix}z\bar{z}' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}a & 0\\ c & b\end{pmatrix}>0,$$

所以变换(7)还把域 $\mathfrak{R}_n$ 映为自己，即变换(7)是域 $\mathfrak{R}_n$ 上的解析自同胚.

最后我們来証明域 $\mathfrak{R}_n$ 是可遞的. 我們断言对域 $\mathfrak{R}_n$ 中任一点 (Z_0, z_0)，一定存在一个解析自同胚(7)，它将 (Z_0, z_0) 映为原点 $(0, 0)$.

我們来考察变换(7). 若要在 $Z=Z_0$, $z=z_0$ 时 $Z^*=0$, $z^*=0$, 只要

$$\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\left[Z_0-i\begin{pmatrix}z_0\bar{z}_0' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+iI\right]\begin{pmatrix}a & 0\\ c & b\end{pmatrix}+L-iI=0.$$

将这等式的虛部与实部分开，则有

$$\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\left(\frac{Z_0+\bar{Z}_0}{2}\right)\begin{pmatrix}a & 0\\ c & b\end{pmatrix}+L=0,$$

$$\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\left[\frac{Z_0-\bar{Z}_0}{2i}+\begin{pmatrix}1-z_0\bar{z}_0' & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}a & 0\\ c & b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=0.$$

于是

$$L=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}(Z_0+\bar{Z}_0)\begin{pmatrix}a & 0\\ c & b\end{pmatrix},$$

$$\frac{Z_0-\bar{Z}_0}{2i}+\begin{pmatrix}1-z_0\bar{z}_0' & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{-2}(1+c^2b^{-2}) & -a^{-1}cb^{-2}\\ -a^{-1}cb^{-2} & b^{-2}\end{pmatrix},$$

所以可以取

$$b=\left(\frac{z_3^{(0)}-\bar{z}_3^{(0)}}{2i}+1\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

$$a=\left(\frac{z_3^{(0)}-\bar{z}_3^{(0)}}{2i}+1\right)^{\frac{1}{2}}\det\left[I+\frac{1}{2i}(Z_0-\bar{Z}_0)-\begin{pmatrix}z_0\bar{z}_0' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

$$c=-\frac{z_2^{(0)}-\bar{z}_2^{(0)}}{2i}\left(\frac{z_3^{(0)}-\bar{z}_3^{(0)}}{2i}+1\right)^{-\frac{1}{2}}\det\left[I+\frac{1}{2i}(Z_0-\bar{Z}_0)-\begin{pmatrix}z_0\bar{z}_0' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

而域 $\mathfrak{R}_n$ 的解析自同胚

$$\begin{cases}Z^*=\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\left[Z-Z_0-2i\begin{pmatrix}\bar{z}_0(z-z_0)' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}a & 0\\ c & b\end{pmatrix},\\ z^*=a(z-z_0)\end{cases} \tag{12}$$

将点 (Z_0, z_0) 映为原点，其中 a, b, c 由(9)，(10)，(11)所定义. 定理一至此証毕.

今变换(12)的变换矩陣是

$$J[(Z_0, z_0);(\bar{Z}_0, \bar{z}_0)]=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a^2 & 0 & 0\\ 2ac & ab & 0\\ c^2 & cb & b^2\end{pmatrix} & O^{(3,n-3)}\\ \begin{pmatrix}-2ia^2\bar{z}_4^{(0)} & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -2ia^2\bar{z}_n^{(0)} & 0 & 0\end{pmatrix} & aI^{(n-3)}\end{pmatrix}. \tag{13}$$

从而

$$\det J((Z_0, z_0); (\bar{Z}_0, \bar{z}_0)) = a^n b^3.$$

我們已經証明了域 $\mathfrak{R}_n$ 是可递的，故熟知这时域 $\mathfrak{R}_n$ 的 Bergmann 核函数是

$$K((Z_0, z_0); (\bar{Z}_0, \bar{z}_0)) = \lambda_0 |\det J((Z_0, z_0); (\bar{Z}_0, \bar{z}_0))|^2 = \lambda_0 |a|^{2n} |b|^6,$$

其中 $\lambda_0 > 0$ 是一常数．将式 (9)，(10) 代入，因点 (Z_0, z_0) 是域 $\mathfrak{R}_n$ 中任一点，故得域 $\mathfrak{R}_n$ 的 Bergmann 核函数：

$$K((Z, z); (\bar{Z}, \bar{z})) = \lambda_0 \left(1 + \frac{z_3 - \bar{z}_3}{2i}\right)^{n-3} \det \left[I + \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) - \begin{pmatrix} z\bar{z}' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-n}. \tag{14}$$

我們将要証明在 $n > 6$ 时域 $\mathfrak{R}_n$ 对应于 Bergmann 度量的 Hermite 曲率和 Riemann 曲率不全取非正值．由于陆启鏗[1]已經証明了华罗庚教授所定义的度量和 Bergmann 的度量是完全一样的，所以在 $n > 6$ 时給出了华罗庚在[2],[3]中的一个猜想的一些反例 (S. Bochner[4] 尝試通过引进一种新的度量来証明华罗庚的猜想是正确的．然而不难看出，在 $n \geqslant 2$ 时他所定义的度量对所有已知的可递域都是不存在的)；而且由于在 $n > 6$ 时 $\mathfrak{R}_n$ 的 Hermite 曲率不常取負值．因此立即推出 É. Cartan 关于可递有界域是对称的猜想[5]是不正确的．因为有界对称域的 Hermite 曲率一定是負的．此外，我們还能証明 $\mathfrak{R}_n$ 域是不可約的域，即 $\mathfrak{R}_n$ 不解析等价于两个較低維域的拓扑乘积．又 И. И. Пятецкий-Шапиро[6] 已經証明了域 $\mathfrak{R}_4$ 和一个五 (复) 維的域都各解析等价于一个有界可递的不可約的非对称域．于是我們有下面一个主要定理：

定理 2. 对于任一 $n \geqslant 4$，总存在一个 n 維的不可約的有界可递的非对称域．

令

$$T_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 \log K}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n. \tag{15}$$

熟知 $\mathfrak{R}_n$ 的 Hermite 曲率张量定义为

$$R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}} = -\frac{\partial^2 T_{\mu\bar{\beta}}}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\alpha} + \sum_{\nu,\tau=1}^{n} \frac{\partial T_{\lambda\bar{\nu}}}{\partial z_\mu} T^{\bar{\nu}\tau} \frac{\partial T_{\tau\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}_\alpha}, \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \cdots, n, \tag{16}$$

于是

$$R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}} = -\frac{\partial^4 \log K}{\partial z_\lambda \partial z_\mu \partial \bar{z}_\alpha \partial \bar{z}_\beta} + \sum_{\nu,\tau=1}^{n} \frac{\partial^3 \log K}{\partial z_\lambda \partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} T^{\bar{\nu}\tau} \frac{\partial^3 \log K}{\partial z_\tau \partial \bar{z}_\alpha \partial \bar{z}_\beta}, \tag{17}$$

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \cdots, n.$$

熟知域 $\mathfrak{R}_n$ 在 $dz = (dz_1, dz_2, \cdots, dz_n)$ 方向的 Hermite 曲率定义为

$$\omega = \frac{\sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{n} R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}} \overline{dz_\alpha}\, dz_\lambda\, dz_\mu\, \overline{dz_\beta}}{\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} T_{\alpha\bar{\beta}}\, dz_\alpha \overline{dz_\beta}\right)^2}. \tag{18}$$

今将 (14) 式直接代入 (15) 式和(17)式，不难算出 $T_{2\bar{2}}$ 和 $R_{\bar{2}22\bar{2}}$ 在原点 $Z = 0$, $z = 0$ 的数值

$$T_{2\bar{2}} = \frac{n}{2}, \quad R_{\bar{2}22\bar{2}} = \frac{n(n-6)}{12}. \tag{19}$$

我們已証了域 $\mathfrak{R}_n$ 是可递的．熟知可递域在每一点的 Hermite 曲率都是相等的，所以我們只要計算原点的 Hermite 曲率就够了．

我們取一个特殊方向

$$dz=(0,1,0,\cdots,0). \tag{20}$$

我們有

定理 3. 当 $n\geqslant 4$ 时，域 $\mathfrak{R}_n$ 在原点的方向(20)的 Hermite 曲率为

$$\omega_0=\frac{R_{\bar{2}2\bar{2}2}}{T_{2\bar{2}}^2}=\frac{n-6}{3n}. \tag{21}$$

于是在 $n>6$ 时 $\omega_0>0$；在 $n=6$ 时 $\omega_0=0$．

在計算域 $\mathfrak{R}_n$ 的 Riemann 曲率以前，我們先給出一个一般的定理．

設 $\mathfrak{D}$ 是 n 維复变数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 空間中一有界域．熟知域 $\mathfrak{D}$ 中可以定义 Bergmann 度量

$$ds^2=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}T_{\alpha\bar{\beta}}\,dz_\alpha\overline{dz_\beta}, \tag{22}$$

其中 $T_{\alpha\bar{\beta}}=\dfrac{\partial^2\log K}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}$，$K$ 是域 $\mathfrak{D}$ 的 Bergmann 核函数．域 $\mathfrak{D}$ 的 Hermite 曲率张量和 Hermite 曲率分别用式(17)和式(18)所定义．

今 $\mathfrak{D}$ 是 $2n$ 維实欧氏空間 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_{2n})=(x,y)=(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$ 中的一有界域．其中

$$z_k=x_k+iy_k,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$dz_k=dx_k+idy_k,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

即得到向量的微分式

$$dz=dx+idy.$$

另一方面，我們将 Bergmann 度量方陣

$$T=\begin{pmatrix}T_{1\bar{1}}&\cdots&T_{1\bar{n}}\\ \vdots&&\vdots\\ T_{n\bar{1}}&\cdots&T_{n\bar{n}}\end{pmatrix}$$

的虚实部分分开，即令

$$T=A+iB,$$

其中 A 和 B 都是 n 阶实方陣，且每个元素都是变量 (x,y) 的实解析函数．又因 $T_{\mathfrak{D}}$ 是 Hermite 方陣，故 $A=A'$，$-B=B'$．而(22)可改写为

$$ds^2=dzT\overline{dz}'=(dx,dy)\begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}(dx,dy)'. \tag{23}$$

取 $2n$ 阶方陣

$$G=\begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}=(g_{ik})_{1\leqslant i,k\leqslant 2n},$$

熟知 Bergmann 度量方陣 T 是定正 Hermite 方陣，故 G 是 $2n$ 阶实定正对称方陣．而式(23)給出了实有界域 $\mathfrak{D}$ 的一个 Riemann 度量：

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^{2n} g_{jk}\, du_j\, du_k = du\, G\, du', \tag{24}$$

其中方陣G即此 Riemann 空間的基本张量.

我們引进熟知的 Christofel 符号

$$[jk, m] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_m}\right), \tag{25}$$

于是

$$R_{hrsk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{hk}}{\partial u_r \partial u_s} + \frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial u_h \partial u_k} - \frac{\partial^2 g_{hs}}{\partial u_r \partial u_k} - \frac{\partial^2 g_{rk}}{\partial u_h \partial u_s}\right) + $$
$$+ \sum_{l,m=1}^{2n} g^{lm}([rs, l]\,[hk, m] - [rk, l]\,[hs, m]) \tag{26}$$
$$(h, r, s, k = 1, 2, \cdots, 2n)$$

定义为域$\mathfrak{D}$的 Riemann 曲率张量,其中 $2n$ 阶方陣 $(g^{lm})_{1\le l,\, m\le 2n}$ 是方陣G的逆方陣.

設 $d_1u = (d_1u_1, d_1u_2, \cdots, d_1u_{2n})$, $d_2u = (d_2u_1, d_2u_2, \cdots, d_2u_{2n})$ 是两个方向. 我們定义域$\mathfrak{D}$上任一点对此两方向的 Riemann 曲率为

$$R = \frac{\sum_{h,r,s,k=1}^{2n} R_{hrsk} d_1u_h d_2u_r d_1u_s d_2u_k}{(d_1uGd_1u')(d_2uGd_2u') - (d_1uGd_2u')^2}. \tag{27}$$

定理 4. n 个复变数空間中有界单叶域$\mathfrak{D}$的 Hermite 曲率张量和 Riemann 曲率张量对任意两个方向 d_1z 和 d_2z, 即 d_1u 和 d_2u 有关系:

$$2\sum_{h,r,s,k=1}^{2n} R_{hrsk}\, d_1u_h\, d_2u_r\, d_1u_s\, d_2u_k =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{n} R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}}(\overline{d_1z_\alpha}d_2z'_\lambda - \overline{d_2z_\alpha}d_1z_\lambda)(d_1z_\mu\overline{d_2z_\beta} - d_2z_\mu\overline{d_1z_\beta}). \tag{28}$$

証. 为了方便起見,我們引进一些記号:

$$d = \sum_{\alpha=1}^{n} dz_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \quad \bar{d} = \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{dz_\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right);$$

$$\tilde{d} = \sum_{j=1}^{2n} du_j \frac{\partial}{\partial u_j} = \sum_{j=1}^{n}\left(dx_j\frac{\partial}{\partial x_j} + dy_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

于是

$$\tilde{d} = d + \bar{d}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}, \quad \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial}{\partial z_\alpha} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}. \tag{29}$$

令

$$F = \begin{pmatrix} I^{(n)} & -iI^{(n)} \\ I^{(n)} & iI^{(n)} \end{pmatrix},$$

其中 $I^{(n)}$ 是 n 阶么方陣. 于是有

$$du = \frac{1}{2}(dz, \overline{dz})F, \tag{30}$$

$$\frac{1}{2}FGF' = \begin{pmatrix} O^{(n)} & T \\ \overline{T} & O^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{31}$$

其中 $O^{(n)}$ 表示 n 阶零方陣. 我們定义 $\tilde{d}G = (\tilde{d}g_{jk})$, $dT = (dT_{\alpha\bar{\beta}})$, $\bar{d}T = (\bar{d}T_{\alpha\bar{\beta}})$. 由(31)式和(29)式我們有

$$F(\tilde{d}G)F' = \tilde{d}(FGF') = 2(d + d')\begin{pmatrix} O & T \\ \overline{T} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2(d+\bar{d})T \\ 2(d+\bar{d})\overline{T} & O \end{pmatrix}.$$

对任意两个可以互相交换的微分算子 $\tilde{d}$, $\tilde{\delta}$, 我們有

$$F(\tilde{d}\tilde{\delta}G)F' = \tilde{d}\tilde{\delta}(FGF') = 2(d+\bar{d})(\delta+\bar{\delta})\begin{pmatrix} O & T \\ \overline{T} & O \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} O & 2(d\delta + d\bar{\delta} + \bar{d}\delta + \bar{d}\bar{\delta})T \\ 2(d\delta + d\bar{\delta} + \bar{d}\delta + \bar{d}\bar{\delta})\overline{T} & O \end{pmatrix}.$$

現在开始証明定理. 由式(26)

$$\sum_{h,r,s,k=1}^{2n} R_{hrsk}\, d_1u_h\, d_2u_r\, d_1u_s\, d_2u_k = I_1 + I_2 + I_3,$$

其中 I_1, I_2, I_3 分别定义且計算如下:

$$I_1 = \frac{1}{2}\sum_{h,r,s,k=1}^{2n}\left(\frac{\partial^2 g_{hk}}{\partial u_r\,\partial u_s} + \frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial u_h\,\partial u_k} - \frac{\partial^2 g_{hs}}{\partial u_r\,\partial u_k} - \frac{\partial^2 g_{rk}}{\partial u_h\,\partial u_s}\right) d_1u_h d_2u_r d_1u_s d_2u_k =$$

$$= \frac{1}{8}[d_1u(\tilde{d}_2\tilde{d}_1G)d_2u' + d_2u(\tilde{d}_1\tilde{d}_2G)d_1u' - d_1u(\tilde{d}_2\tilde{d}_2G)d_1u' - d_2u(\tilde{d}_1\tilde{d}_1G)d_2u'] =$$

$$= \frac{1}{2}[d_1z(d_1d_2 + \bar{d}_1d_2 + d_1\bar{d}_2 + \bar{d}_1\bar{d}_2)T\,\overline{d_2z}' + d_2z(d_1d_2 + \bar{d}_1d_2 + d_1\bar{d}_2 + \bar{d}_1\bar{d}_2)T\,\overline{d_1z}'] -$$

$$- \frac{1}{2}[d_1z(\bar{d}_2\bar{d}_2 + 2d_2\bar{d}_2 + d_2d_2)T\,\overline{d_1z}' + d_2z(d_1d_1 + 2d_1\bar{d}_1 + \bar{d}_1\bar{d}_1)T\,\overline{d_2z}'].$$

今由式(15), 对任意四个可互相交换的方向 d_1, d_2, d_3, d_4, 我們有

$$d_1z(d_2d_3T)\overline{d_4z}' = \sum_{\alpha,\beta,\sigma,\tau=1}^{n} d_1z_\alpha d_2z_\sigma d_3z_\tau \overline{d_4z_\beta}\,\frac{\partial^4 \log K}{\partial z_\alpha\,\partial z_\sigma\,\partial z_\tau\,\partial \bar{z}_\beta}.$$

于是

$$d_1z(d_2d_3T)\overline{d_4z}' = d_2z(d_3d_1T)\overline{d_4z}' = d_3z(d_1d_2T)\overline{d_4z}'.$$

同理

$$d_1z(\bar{d}_2\bar{d}_3T)\overline{d_4z}' = d_1z(\bar{d}_4\bar{d}_2T)\overline{d_3z}' = d_1z(\bar{d}_3\bar{d}_4T)\overline{d_2z}',$$

又因

$$d_1z(d_2\bar{d}_3T)\overline{d_4z}' = \sum_{\alpha,\beta,\sigma,\tau=1}^{n} d_1z_\alpha d_2z_\beta \overline{d_3z_\sigma}\,\overline{d_4z_\tau}\,\frac{\partial^4 \log K}{\partial z_\alpha\,\partial z_\beta\,\partial \bar{z}_\sigma\,\partial \bar{z}_\tau},$$

于是

$$d_1z(d_2\bar{d}_3T)\overline{d_4z}' = d_2z(d_1\bar{d}_3T)\overline{d_4z}' = d_1z(d_2\bar{d}_4T)\overline{d_3z}' = d_2z(d_1\bar{d}_4T)\overline{d_3z}'.$$

所以

$$I_1 = \frac{1}{2}[d_1z(d_1\bar{d}_2T)\overline{d_2z}' + d_2z(d_2\bar{d}_1T)\overline{d_1z}' - 2d_1z(d_2\bar{d}_1T)\overline{d_2z}'].$$

今由式(15),定义

$$\left(d_1z\frac{\partial T}{\partial z}\overline{d_2z'}\right)'=\left(d_1z\frac{\partial T}{\partial z_1}\overline{d_2z'},\cdots,d_1z\frac{\partial T}{\partial z_n}\overline{d_2z'}\right),$$

于是

$$\left(d_1z\frac{\partial T}{\partial z}\overline{d_2z'}\right)'=\left(\cdots,\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}d_1z_\alpha\overline{d_2z_\beta}\frac{\partial^3\log K}{\partial z_\alpha\partial\bar z_\beta\partial z_\sigma},\cdots\right)'=d_1T\overline{d_2z'}.$$

同理

$$\left(d_1z\frac{\partial T}{\partial\bar z}\overline{d_2z'}\right)=d_1z\bar d_2T.$$

又直接計算可知

$$d_1zd_2T=d_2zd_1T,\qquad \bar d_1T\overline{d_2z'}=\bar d_2T\overline{d_1z'}.$$

記 $2n$ 維实向量

$$\left(d_1u\frac{\partial G}{\partial u}d_2u'\right)=\left(d_1u\frac{\partial G}{\partial u_1}d_2u',\cdots,d_1u\frac{\partial G}{\partial u_{2n}}d_2u'\right).$$

利用式(29),(30),(31),我們有

$$\begin{aligned}
\left(d_1u\frac{\partial G}{\partial u}d_2u'\right)F'&=\left(\cdots,\frac12(d_1z,\overline{d_1z})\frac{\partial FGF'}{\partial x_i}(d_2z,\overline{d_2z})',\cdots;\right.\\
&\qquad\left.\cdots,\frac12(d_1z,\overline{d_1z})\frac{\partial FGF'}{\partial y_i}(d_2z,\overline{d_2z})',\cdots\right)=\\
&=\left(\cdots,\frac12(d_1z,\overline{d_1z})\left(\frac{\partial}{\partial z_i}+\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\begin{pmatrix}O&T\\ \bar T&O\end{pmatrix}(d_2z,\overline{d_2z})',\cdots;\right.\\
&\qquad\left.\cdots,\frac12(d_1z,\overline{d_1z})\left(\frac{\partial}{\partial z_i}-\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\begin{pmatrix}O&T\\ \bar T&O\end{pmatrix}(d_2z,\overline{d_2z})',\cdots\right)\begin{pmatrix}I&I\\-iI&iI\end{pmatrix}=\\
&=\left(\cdots,(d_1z,\overline{d_1z})\frac{\partial}{\partial z_i}\begin{pmatrix}O&T\\ \bar T&O\end{pmatrix}(d_2z,\overline{d_2z})',\cdots;\right.\\
&\qquad\left.\cdots,(d_1z,\overline{d_1z})\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\begin{pmatrix}O&T\\ \bar T&O\end{pmatrix}(d_2z,\overline{d_2z})',\cdots\right)=\\
&=\left(\cdots,\overline{d_1z}\frac{\partial\bar T}{\partial z_i}d_2z'+d_1z\frac{\partial T}{\partial z_i}\overline{d_2z'},\cdots;\right.\\
&\qquad\left.\cdots,\overline{d_1z}\frac{\partial\bar T}{\partial\bar z_i}d_2z'+d_1z\frac{\partial T}{\partial\bar z_i}\overline{d_2z'},\cdots\right)=\\
&=\left(\left(d_1z\frac{\partial T}{\partial z}\overline{d_2z'}\right)+\left(d_2z\frac{\partial T}{\partial z}\overline{d_1z'}\right);\left(d_1z\frac{\partial T}{\partial\bar z}\overline{d_2z'}\right)+\left(d_2z\frac{\partial T}{\partial\bar z}\overline{d_1z'}\right)\right)=\\
&=(\overline{d_2z}\,d_1T'+\overline{d_1z}\,d_2T',\ d_1z\bar d_2T+d_2z\,\bar d_1T).
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
I_2&=\sum_{h,r,s,k,l,m=1}^{2n}g^{lm}[rs,l][hk,m]\,d_1u_hd_2u_rd_1u_sd_2u_k=\\
&=\frac14\sum_{l,m=1}^{2n}\sum_{r,s=1}^{2n}d_2u_rd_1u_s\left(\frac{\partial g_{rl}}{\partial u_s}+\frac{\partial g_{sl}}{\partial u_r}-\frac{\partial g_{rs}}{\partial u_l}\right)g^{lm}\sum_{h,k=1}^{2n}\left(\frac{\partial g_{hm}}{\partial u_k}+\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial g_{km}}{\partial u_h}-\frac{\partial g_{hk}}{\partial u_m}\Big)d_1u_hd_2u_k=$$

$$=\frac{1}{4}\left[d_2u\tilde{d}_1G+d_1u\tilde{d}_2G-\left(d_2u\frac{\partial G}{\partial u}d_1u'\right)\right]G^{-1}\left[\tilde{d}_1Gd_2u'+\right.$$

$$\left.+\tilde{d}_2Gd_1u'-\left(d_2u\frac{\partial G}{\partial u}d_1u'\right)'\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{d_2z}\,\overline{d_1T}+\overline{d_1z}\,\overline{d_2T},\ d_2z\,d_1T+d_1z\,d_2T)F'^{-1}G^{-1}F^{-1}(\overline{d_2z}\,\overline{d_1T}+$$

$$+\overline{d_1z}\,\overline{d_2T},\ d_2z\,d_1T+d_1z\,d_2T)'=$$

$$=\frac{1}{4}(d_1z\,d_2T+d_2z\,d_1T)T^{-1}(\overline{d_1z}\,\overline{d_2T}+\overline{d_2z}\,\overline{d_1T})'=$$

$$=(d_2z\,d_1T)T^{-1}(\bar{d}_2T\,\overline{d_1z}').$$

又同理

$$I_3=-\sum_{h,r,s,k,l,m=1}^{2n}g^{lm}[rk,l][hs,m]\,d_1u_h\,d_2u_r\,d_1u_s\,d_2u_k=$$

$$=-\frac{1}{2}[(d_2z\,d_2T)T^{-1}(\bar{d}_1T\overline{d_1z}')+(d_1z\,d_1T)T^{-1}(\bar{d}_2T\,\overline{d_2z}')],$$

所以

$$I_1+I_2+I_3=(d_2z\,d_1T)T^{-1}(\bar{d}_2T\,\overline{d_1z}')-d_2z\,(d_1\bar{d}_2T)\,\overline{d_1z}'-$$

$$-\frac{1}{2}[(d_2z\,d_2T)T^{-1}(\bar{d}_1T\,\overline{d_1z}')-d_2z(d_2\,\bar{d}_1T)\,\overline{d_1z}']-$$

$$-\frac{1}{2}[(d_1z\,d_1T)T^{-1}(\bar{d}_2T\,\overline{d_2z}')-d_1z(d_1\,\bar{d}_2T)\,\overline{d_2z}'].$$

由式(16)我們有

$$\sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{n}R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}}\,\overline{d_1z_\alpha}\,d_2z_\lambda\,d_1z_\mu\,\overline{d_2z_\beta}=(d_2z\,d_1T)T^{-1}(\bar{d}_2T\,\overline{d_1z}')-d_2z(d_1\bar{d}_2T)\,\overline{d_1z}',$$

$$\sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{n}R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}}\,\overline{d_1z_\alpha}\,d_2z_\lambda\,d_2z_\mu\,\overline{d_1z_\beta}=(d_2z\,d_2T)T^{-1}(\bar{d}_1T\,\overline{d_1z}')-d_2z(d_2\bar{d}_1T)\,\overline{d_1z}',$$

$$\sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{n}R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}}\,\overline{d_2z_\alpha}\,d_1z_\lambda\,d_1z_\mu\,\overline{d_2z_\beta}=(d_1z\,d_1T)T^{-1}(\bar{d}_2T\,\overline{d_2z}')-d_1z(d_1\bar{d}_2T)\,\overline{d_2z}'.$$

这就証明了定理.

另外由式(30),(31)不难由計算得到

$$(d_1uGd_1u')(d_2uGd_2u')-(d_1uGd_2u')^2=$$

$$=(d_1zT\,\overline{d_1z}')(d_2zT\,\overline{d_2z}')-\frac{1}{4}(d_1zT\,\overline{d_2z}'+d_2zT\,\overline{d_1z}')^2.$$

这样一来,我們就得到 Riemann 曲率用 Hermite 曲率张量表达的公式:

$$R=\frac{2\sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{n}R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}}(\overline{d_1z_\alpha}\,d_2z_\lambda-\overline{d_2z_\alpha}\,d_1z_\lambda)(d_1z_\mu\overline{d_2z_\beta}-\overline{d_1z_\beta}\,d_2z_\mu)}{4(d_1zT\,\overline{d_1z}')(d_2zT\,\overline{d_2z}')-(d_1zT\,\overline{d_2z}'+d_2zT\,\overline{d_1z}')^2}. \tag{32}$$

取两个特殊方向

$$d_1z=(0,1,0,\cdots,0),\quad d_2z=(0,i,0,\cdots,0),\tag{33}$$

我們有

定理 5. 当 $n\geqslant 4$ 时，域 $\mathfrak{R}_n$ 在原点的两个方向(33)的 Riemann 曲率为

$$R_0=\frac{8R_{\bar{2}2\bar{2}2}}{4T_{\bar{2}2}^2}=\frac{2(n-6)}{3n}.\tag{34}$$

于是在 $n>6$ 时 $R_0>0$; 在 $n=6$ 时 $R_0=0$.

到現在为止，我們証明了在 $n>6$ 时域 $\mathfrak{R}_n$ 的 Hermite 曲率和 Riemann 曲率不全取非正值. 在 $n=6$ 时，它們不全取負值. 余下来是要証明 $\mathfrak{R}_n$ 的不可約性. 在証明以前，我們先給出域不可約的一个判别法.

定理 6. 設 n 个复变数 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 空間中一有界的可遞单叶域 $\mathfrak{D}$ 的最大連通解析自同胚羣 $\mathfrak{G}$ 可递. 設域 $\mathfrak{D}$ 包含坐标原点. 对域 $\mathfrak{D}$ 中任一点 z，設 $\sigma_z\in\mathfrak{G}$ 是将原点映为点 z 的解析自同胚. 設 $J(z,\bar{z})$ 是 σ_z 的变換方陣在原点的值，并且是 z 和 $\bar{z}$ 在域 $\mathfrak{D}$ 的解析函数. 如果不存在常数酉方陣 U 将 $J(0,\bar{z})$, $(z\in\mathfrak{D})$ 同时化成准对角形，換句話說，矩陣集合 $\{J(0,\bar{z})\,|\,z\in\mathfrak{D}\}$ 在酉方陣下非完全可約，那末域 $\mathfrak{D}$ 是不可約的.

証. 設有界单叶域 $\mathfrak{D}$ 是可約的，且包含原点，即存在一个解析同胚 τ，它将域 $\mathfrak{D}$ 映为两个有界单叶域 $\mathfrak{D}_1$ 和 $\mathfrak{D}_2$ 的拓扑乘积，且将原点映为原点.

設 $\mathfrak{D}_1$ 是 m 个复变数 $z_1^*,\cdots,z_m^*$ 空間 $(m<n)$ 中一域，$\mathfrak{D}_2$ 是 $n-m$ 个复变数 $z_{m+1}^*,\cdots,z_n^*$ 空間中一域. 則域 $\mathfrak{D}_1\times\mathfrak{D}_2$ 中点可記为 $z^*=(z_1^*,\cdots,z_m^*,z_{m+1}^*,\cdots,z_n^*)$. 不妨假設域 $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ 在原点的 Bergmann 度量方陣都是么方陣. 設解析同胚 τ 的函数方陣为 $J_\tau(z)$，我們熟知有关系式:

$$T_{\mathfrak{D}}(z,\bar{z})=J_\tau(z)\,T_{\mathfrak{D}_1\times\mathfrak{D}_2}(z^*,\bar{z}^*)\,\overline{J_\tau(z)}',$$

其中 $z^*=\tau(z)$，由假設 $\tau(0)=0$，所以

$$T_{\mathfrak{D}}(0,\bar{0})=J_\tau(0)\,T_{\mathfrak{D}_1\times\mathfrak{D}_2}(0,0)\,\overline{J_\tau(0)}',$$

即

$$J_\tau(0)\,\overline{J_\tau(0)}'=I.$$

換言之，$J_\tau(0)$ 是一个 n 阶酉方陣.

H. Cartan[7] 証明了任一有界域 $\mathfrak{D}_0$ 如果是两較低維有界域 $\mathfrak{D}_1$ 和 $\mathfrak{D}_2$ 的拓扑乘积 $\mathfrak{D}_0=\mathfrak{D}_1\times\mathfrak{D}_2$，并設 $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ 各为域 $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ 的最大連通解析自同胚羣，則羣 $\mathfrak{G}_0$ 是羣 $\mathfrak{G}_1$ 和 $\mathfrak{G}_2$ 的直乘积: $\mathfrak{G}_0=\mathfrak{G}_1\times\mathfrak{G}_2$.

对 $\mathfrak{G}$ 中任一解析自同胚 σ，熟知 $\sigma^*=\tau\sigma\tau^{-1}$ 是域 $\mathfrak{D}_1\times\mathfrak{D}_2$ 上的解析自同胚，由于 $\mathfrak{G}\approx\mathfrak{G}_1\times\mathfrak{G}_2$. 所以 $\sigma^*\in\mathfrak{G}_1\times\mathfrak{G}_2$，即解析自同胚 σ^* 的变換函数为

$$\tilde{z}_k^*=g_k(z_1^*,\cdots,z_m^*)\quad(k=1,2,\cdots,m),$$
$$\tilde{z}_l^*=g_l(z_{m+1}^*,\cdots,z_n^*)\quad(l=m+1,\cdots,n),$$

所以 σ^* 的变換方陣为

$$J_{\sigma^*}(z^*)=\frac{\partial(\tilde{z}_1^*,\cdots,\tilde{z}_n^*)}{\partial(z_1^*,\cdots,z_n^*)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(g_1,\cdots,g_m)}{\partial(z_1^*,\cdots,z_m^*)} & O^{(m,n-m)}\\ O^{(n-m,m)} & \dfrac{\partial(g_{m+1},\cdots,g_n)}{\partial(z_{m+1}^*,\cdots,z_n^*)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{(m)} & O^{(m,n-m)}\\ O^{(n-m,m)} & B^{(n-m)}\end{pmatrix}.$$

今由假設 $\tau(0)=0$ 和关系 $\sigma^*=\tau\sigma\tau^{-1}$ 可知，解析同胚 σ, τ, σ^* 的变换方陣間有如下关系：

$$J_{\sigma^*}(0)=J_\tau^{-1}(0)J_\sigma(0)J_\tau(\sigma(0)). \tag{35}$$

今假設羣 $\mathfrak{G}$ 是可遞的. 对域 $\mathfrak{D}$ 中任一点 z，域 $\mathfrak{D}$ 上存在一个解析自同胚 $\sigma_z\in\mathfrak{G}$，使得

$$\sigma_z(0)=z.$$

于是(35)式可改写为

$$\begin{pmatrix} A(z,\bar{z}) & O^{(m,n-m)} \\ O^{(n-m,m)} & B(z,\bar{z}) \end{pmatrix}=J_\tau^{-1}(0)J_{\sigma_z}(0)J_\tau(z). \tag{36}$$

今已知 $J_\tau(0)$ 是 n 阶酉方陣，我們簡記之为 U^{-1}，它与 z 无关. 又显然方陣 $J_\tau(z)$ 的任一元素是 z 在域 $\mathfrak{D}$ 上的解析函数. 又由定理假設 $J_{\sigma_z}(0)=J(z,\bar{z})$ 是 z 和 $\bar{z}$ 在域 $\mathfrak{D}$ 的解析函数，所以矩陣 A 和 B 的每个元素也都是 z 和 $\bar{z}$ 在域 $\mathfrak{D}$ 的解析函数.

在式(36)中我們将 z 和 $\bar{z}$ 看作是独立变量，且取 $z=0$，我們有

$$\begin{pmatrix} A(0,\bar{z}) & O \\ O & B(0,\bar{z}) \end{pmatrix}=UJ(0,\bar{z})U^{-1}.$$

換言之，矩陣集合 $\{J(0,\bar{z})\mid z\in\mathfrak{D}\}$ 在酉方陣下完全可約. 这就証明了定理.

現在我們应用定理 6 来証明域 $\mathfrak{R}_n$ 的不可約性. 显然，域 $\mathfrak{R}_n$ 的解析自同胚 (7) 全体构成一个域 $\mathfrak{R}_n$ 的可遞連通解析自同胚羣. 由(12)和(13)两式，該羣中将域 $\mathfrak{R}_n$ 中原点映为任一点 (Z_0, z_0) 的解析自同胚在原点的变换矩陣为式(13)定义的方陣的逆.

定理 7. 当 $n\geqslant 4$ 时域 $\mathfrak{R}_n$ 是不可約的.

証. 由定理 6，我們只要証明不存在一个 n 阶常数酉方陣 U，使得(13)式[为方便起見，我們将式(9)—(13)中的足碼都取消]的矩陣 J 适合

$$UJ((0,0);(\bar{Z},\bar{z}))\bar{U}'=\begin{pmatrix} A((0,0);(\bar{Z},\bar{z})) & O^{(m,n-m)} \\ O^{(n-m,m)} & B((0,0);(\bar{Z},\bar{z})) \end{pmatrix},$$

其中 A 和 B 各为 $m(1\leqslant m<n)$ 和 $n-m$ 阶方陣.

在具体計算时，我們将酉方陣 U 分成四块

$$U=\begin{pmatrix} U_1^{(3)} & U_2^{(3,n-3)} \\ U_3^{(n-3,3)} & U_4^{(n-3)} \end{pmatrix}.$$

又令

$$J((0,0);(\bar{Z},\bar{z}))=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ac & ab & 0 \\ c^2 & cb & b^2 \end{pmatrix} & O \\ -2ia^2\begin{pmatrix} \bar{z}_4 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{z}_n & 0 & 0 \end{pmatrix} & aI^{(n-3)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P^{(3)} & O^{(3,n-3)} \\ Q^{(n-3,3)} & aI^{(n-3)} \end{pmatrix}, \tag{37}$$

其中由(9)，(10)，(11)式

$$\begin{cases} a = \left(1 - \frac{\bar{z}_3}{2i}\right)^{\frac{1}{2}} \det\left(I - \frac{1}{2i}\bar{Z}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ b = \left(1 - \frac{\bar{z}_3}{2i}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ c = \frac{\bar{z}_2}{2i}\left(1 - \frac{\bar{z}_3}{2i}\right)^{-\frac{1}{2}} \det\left(I - \frac{1}{2i}\bar{Z}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{38}$$

今若域 $\mathfrak{R}_n$ 可約,那末

$$UJ((0, 0); (\bar{Z}, \bar{z}))\bar{U}' = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ Q & aI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{U}_1' & \bar{U}_3' \\ \bar{U}_2' & \bar{U}_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

于是我們有

$$(U_1P + U_2Q)\bar{U}_3' + aU_2\bar{U}_4' = O,$$
$$(U_3P + U_4Q)\bar{U}_1' + aU_4\bar{U}_2' = O.$$

注意到 a, b, c 与 $\bar{z}_4, \cdots, \bar{z}_n$ 无关. 取 $\bar{z}_4 = \cdots = \bar{z}_n = 0$, 于是有恆等式

$$\begin{aligned} &U_3P\bar{U}_1' + aU_4\bar{U}_2' \equiv O, \\ &U_1P\bar{U}_3' + aU_2\bar{U}_4' \equiv O. \end{aligned} \tag{39}$$

从而对一切 $\bar{z}_4, \cdots, \bar{z}_n$ 有

$$U_2Q\bar{U}_3' \equiv O, \qquad U_4Q\bar{U}_1' \equiv O. \tag{40}$$

任取 U_4 的一行 $(a_4, \cdots, a_n)$, U_2 的一行$(b_4, \cdots, b_n)$, U_1 的一行 (c_1, c_2, c_3), U_3 的一行 (d_1, d_2, d_3), 即

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_4 & b_5 & \cdots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_4 & a_5 & \cdots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

由式(40),我們有

$$d_1 \sum_{k=4}^{n} b_k\bar{z}_k = 0, \qquad c_1 \sum_{k=4}^{n} a_k\bar{z}_k = 0. \tag{42}$$

但是 U 非异,即第一列不全为零. 在(41)中可看出存在一个 $c_1 \neq 0$, 或一个 $d_1 \neq 0$. 設在 U_3 中可选取一个第一列元素 $d_1 \neq 0$. 于是由(42), $b_4 = \cdots = b_n = 0$. 但 $(b_4, \cdots, b_n)$ 是 U_2 的任一行,因此 $U_2 = 0$. 今 U 是酉方陣, 故立即可得 $U_3 = 0$, 这与 $d_1 \neq 0$ 矛盾, 所以我們証明了 U_3 的第一列必全为零. 从而 U_1 的第一列中一定存在一个元素 $c_1 \neq 0$. 由(42)式,于是 $U_4 = 0$, 而这时 U 的最后 $n - 3$ 行是

$$(U_3U_4) = \begin{pmatrix} 0 & d_{24} & d_{34} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & d_{2n} & d_{3n} & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}.$$

今 U 非异,故最后 $n - 3$ 行的秩必須为 $n - 3$, 另一方面 (U_3U_4) 除两列元素外全是 0, 所以必須有 $n - 3 \leqslant 2$, 或 $n \leqslant 5$. 至此对于 $n \geqslant 6$ 时, 定理已得証. 对于 $n = 4$ 及 $n = 5$ 这两种情形,利用由式(39)导出的关系式

$$U_3P\bar{U}_1' \equiv 0$$

及 U 是酉方陣这两点很容易推出矛盾. 定理 7 便証完.

域 $\mathfrak{R}_4$ 是首先由 И. И. Пятецкий-Шапиро 引进的[6]. 他用域 $\mathfrak{R}_4$ 的边界的几何性質

証明了它的不可約性(証明并未发表)．我們在定理 7 中只用了域 $\mathfrak{R}_I$ 的内在性质，并且用初等的方法証明了它的不可約性．

参 考 文 献

[1] 陆启鏗，多复变数函数与酉几何，数学进展，**2** (1956), 567—662.
[2] 华罗庚 (Hua, L. K.), On the theory of Fuchsian functions of several variables, *Annals of Math.*, **47** (1946), 167—191.
[3] 华罗庚，多复变数非欧空間中黎曼曲率的估計問題，数学学报，**4** (1954), 143—170.
[4] Bochner, S., Curvature in Hermite metric, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 179—195.
[5] Cartan, É., Sur les domaines bornés homongènes de l'espace de n-variables complexes, *Hamburg Univ. Math. Sem. Abh.*, **11** (1935), 116—162.
[6] Пятецкий-Шапиро, И. И., Об одной проблеме Э. Картана, *ДАН*, **124** (1959), 272—273.
[7] Cartan, H., Sur les transformations pseudo-conformes du produit topologique de deux domaines, *Comptes Rendus*, **199** (1934), 925—927.

第11卷 第1期　　数 学 学 报　　Vol. 11, No. 1
1961 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　March, 1961

有限二人零和对策問題在蔬菜种植計划中的应用*

山东大学数学系二、三年級运筹学小組

本文的內容是根据济南市东郊人民公社当前的生产任务和現有条件，将有限二人零和对策[1]的理論用于蔬菜种植計划，得出最优播种方案，該方案經公社党委研究，正在执行。

这一工作是山东大学数学系二、三年級部分同学在党的直接領导和关怀下进行的，在进行过程中，公社社員的大力支持，老师和同学的帮助，都給了我們很大的鼓舞。

§1. 問題的提出

济南东郊人民公社一切工作是以蔬菜生产为綱，因此在安排各項工作中，首先保証蔬菜生产，尽最大的劳力和物質資源滿足其需要。目前該社陈宿大队，正在計划一个全队的蔬菜种植計划。但是該队在劳力、肥料、水、种子等各个方面存在着不少困难，不能完全滿足計划上所需要的数字，具体情况如下：

1. 全队男女整半劳力共 969 名；总耕地面积为 3150 亩，其中良田 1784 亩，菜地 1300 亩，食堂菜地 66 亩；粮田共需劳动 320 名，菜地需 650 名，共需 970 名，但該队实际上只能有 614 名参加生产，所以缺劳力 356 名。

2. 菜地肥料共需土肥 650 万斤，化肥 65000 斤，平均每亩用肥 5000 斤左右，現尚欠土肥 430 万斤，化肥 60000 斤左右。該队已大力采购并运输入队。

3. 現有灌溉能力为浇地 714 亩，尚缺 650 亩左右的灌溉量，故該队准备尽可能增添八口电井。

由于蔬菜生产是中心任务，虽然菜地劳力不足，但准备从其他方面抽出劳力投入菜地生产，以滿足其需要。对于土肥方面，虽然大量增加肥料来源(例如在外大量采购)；但不能完全掌握肥料增添的数量(可能多些也可能少些)。对于水也是同样，由于购买电动机、抽水机等不能确定购进的数量，所以菜地的灌溉能力还不能掌握，因此該队存在一个很实际而极需解决的問題，那就是如何安排一个各种蔬菜的种植計划，使得在水和肥的各种不同的条件下，能够在保証菜地总产量(以滿足市民的需要)的基础上增加总产值。他們的原有打算是这样的：

表 1

品　　种	茄子	辣椒	大葱	茎兰	大白菜	芹菜	胡蘿卜	水蘿卜	脆蘿卜	芥菜	菠菜	小白心	雪里紅
亩　　数	80	20	80	80	120	20	300	250	100	80	50	40	50

---

* 1960 年 11 月 24 日收到。

1) 对策論应用于农业或其他生产部門中，首先要依据党的方針政策，作为形成数学模型的指导思想。本文是利用对策論处理农业生产中一些問題的一种尝試，反映了实际問題的一定方面，作为实际工作者更全面的考察中的参考。

經过分析我們訊为这是一个对策問題,对策者为人和大自然.

§2. 調查資料

为了具体建立我們所想到的对策模型,必須确定大自然的策略、人的策略以及贏得函数. 在这里大自然的策略实际上表現在困难方面,如肥、水、劳力、种子,这四方面的各种可能組合而形成的綜合情況. 人的策略就表現为蔬菜种植計划,而贏得函数也就是某一綜合条件下,人們的某一計划所得到的收入. 这样看来,我們必須知道在各种不同的綜合情况下,各种不同蔬菜的产量将受到怎样的影响,并且为了計算生产总值,还要知道每种蔬菜的价格.

收集大量可靠的数据,并加以科学的处理,使之反应客观事实,这样要进行的工作才可能完成. 我們遵循着毛主席的教导对調查研究极为重視,因为这是我們全部工作的基础所在.

为此,我們先后到东郊蔬菜試驗站和北园公社楊庄生产队,作了比較詳細和具体的了解. 这是两个长年种植蔬菜的地方,并且还有若干研究工作. 我們将所了解的材料,与在陈宿生产队蔬菜大队长(一位富有种菜的經驗老农民)所了解的材料加以对比,发現三方面的材料基本上是一致的,詳見表 2.

表 2

品种	每亩用工	施肥		用水(次)	价格(分)	每亩产量(斤)	备注
		土肥(斤)	化肥(斤)				
茄子	40	15000	120	25—30	3	8000	
辣椒	50	10000 以上	120	20	7	4000	
大葱	35	10000	50	12	4	7000—8000	
苤兰	30	10000—15000	80	20	3	10000	
大白菜	35	10000	120	20	3	20000	
芹菜	40	10000	200	60—70	6	15000	
水蘿卜	30	10000	用或不用	24	3	10000	
胡蘿卜	35	10000	同上	一般不用	3	8000	
脆蘿卜	35	60000—70000	同上	30	3—4	10000	
芥菜	30	9000	30	20	3	5000—6000	
菠菜	35	10000	80	24	5—6	6000	
小白心	30	10000	80	20	3	15000	
雪里紅	35	11000	30	15	3	6000	

把上面的材料加以适当的处理,处理的原则是把困难只考慮肥、水两方面,因为这两个方面人們还不能掌握;而种子不多,沒有选择的余地,同时該大队虽劳力較缺,但因为是以蔬菜为綱,首先保証蔬菜生产,因此蔬菜所需之劳力可以訊为是足够的,这样种子和劳力可以不考慮. 根据农民的意見,我們把水的情况分为足

表 3

水 \ 肥	缺的較多	缺一点	足够
足够	*A*	*B*	*C*
不够	*D*	*E*	*F*

够、不够两种，把肥分为足够、缺一点、缺的較多三种，这样水和肥的六个組合，就可以認为是大自然的策略了，我們用 A, B, C, D, E, F 表示这些綜合情况(見表 3)。

在各种綜合情况下各种蔬菜的产量和价値就以表 4 来表示。

表 4

品种 \ 自然条件		A	B	C	D	E	F
茄子	亩产(斤)	4000	4800	5600	2400	3200	4000
	价値(元)	120	144	168	72	96	120
辣椒	亩产(斤)	1400	2000	2400	1000	1600	2000
	价値(元)	98	140	168	70	112	140
大葱	亩产(斤)	4000	4800	5600	2400	3200	4000
	价値(元)	100	192	224	96	128	100
苤兰	亩产(斤)	4000	5000	5500	2500	3000	4000
	价値(元)	120	150	160	75	90	120
大白菜	亩产(斤)	8000	10000	13000	6000	9000	12400
	价値(元)	240	300	390	180	270	372
芹菜	亩产(斤)	5000	6000	7000	2500	3000	3500
	价値(元)	300	360	420	150	180	210
胡蘿卜	亩产(斤)	5000	6000	7000	5000	6000	7000
	价値(元)	150	180	210	150	180	210
水蘿卜	亩产(斤)	4000	4800	5600	4000	4800	5600
	价値(元)	120	144	168	120	128	168
脆蘿卜	亩产(斤)	4000	4800	5600	4000	4800	5600
	价値(元)	160	192	224	160	192	224
芥菜	亩产(斤)	3000	3600	4200	1800	2400	3000
	价値(元)	90	108	126	56	72	90
菠菜	亩产(斤)	2000	3000	3700	1600	2000	3000
	价値(元)	120	180	222	96	120	180
小白心	亩产(斤)	5000	6000	7000	3000	3500	4000
	价値(元)	150	180	210	90	105	120
雪里紅	亩产(斤)	3000	3600	4200	1800	2400	3000
	价値(元)	90	108	126	54	72	90

从上述看来，我們的材料是全面而可靠的，并且經过适当处理之后，几乎可以直接从表 4 来建立我們的对策模型了。

§3. 模型的建立

1. 对策者的确定。

我們确定人与自然为对策者，并依次以 P_1 和 P_2 表之。

2. 对策者的策略的确定。

經过我們研究以及大队里一些同志的帮助，訒为自然界能采取的策略为 A, B, C, D, E, F 六种情况（見表 3）．比如自然界采取策略 E 的意思是在生产过程里我們碰到了肥缺一些，水也缺一些的情况，其他策略类推．我們用 $S_2 = \{A, B, C, D, E, F\}$ 表 P_2 的策略集．

下面我們来确定人的策略．在自然界出現的各种情况下，我們可在 1300 亩地里适当的安排各种蔬菜占地面积的比例，对于每一个分配方案，我們可以訒为是，人向自然斗爭的一个策略．但是很重要的是，在决定人的策略时，必須要該队能够胜任的．为此，在决定人的各种策略时，我們多次与該队負責人、蔬菜生产的大队长以及其他領导者詳細討論，根据各种蔬菜需水肥的数量的情况，以及大队里实际存在的一些其他因素，确定出 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ 五种策略（其中包括他們队里原来的一个策略）詳列如表 5．

表 5

亩数 品种 / 人的策略	茄子	辣椒	大葱	苤兰	大白菜	芹菜	胡蘿卜	水蘿卜	脆蘿卜	芥菜	菠菜	小白心	雪里紅
α	80	20	80	80	120	50	300	250	100	80	50	40	50
β	80	20	80	70	100	45	300	265	110	80	60	40	50
γ	80	20	95	85	100	50	315	265	115	60	60	30	35
δ	80	20	85	85	118	55	290	267	115	65	50	35	35
ε	80	20	85	85	130	50	290	255	105	70	50	40	40

由于該队現已将茄子 80 亩，辣椒 20 亩种到地里，所以在五种策略里它們的品种数都保持不变．

我們用 $S_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ 表示 P_1 的策略集．

3. 贏得函数的确定．

設 P_1 的贏得 $H_1(i, j)$ 为当 P_1 取策略 i，P_2 取策略 j 时 1300 亩菜地的总产值，其中 $i = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$，$j = A, B, C, D, E, F$．当然可設 P_2 的贏得 $H_2(i, j) = -H_1(i, j)$，經过計算就得出这个对策的支付关系（P_2 对 P_1）．

$H_1(i, j)$ j / i	A	B	C	D	E	F
α	192460	235120	278200	156360	197520	242840
β	189560	231700	273630	155620	195600	239710
γ	192060	234799	277095	158235	198580	243280
δ	194370	237218	280751	158475	199813	245362
ε	194360	238990	281385	157835	199750	246020

4. 模型的建立．

若以 $I = \{P_1, P_2\}$ 表对策者的集合，$S = S_1 \times S_2$ 表策略集的笛卡尔乘积，并且令 $H(i, j) = H_1(i, j) = -H_2(i, j)$，則有限二人零和对策可表为

$$\Gamma = \langle I, S, H \rangle.$$

§4. 对策的解及其实用价值

从支付关系不难看出 (δ, D) 是唯一的平衡局势，δ 是 P_1 的平衡策，即最优策略.

我們把策略 δ 的分配方案和大队党书記及蔬菜大队长共同研究，并和他們原来的分配方案对比. 結果他們認为我們的方案好，最后他們决定按照我們的方案执行，而且目前正在执行.

第11卷 第1期　　数 学 学 报　　Vol. 11, No. 1
1961 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　March, 1961

关於在等高綫图上計算矿藏儲量与坡地面积的問題*

華罗庚　王　元
（中国科学院数学研究所）

§1. 引　言

感謝我国的地理、矿冶与地质工作者們，他們向我們介紹了不少計算矿藏儲量与計算坡地面积的实用方法，使我們能学习到这些方法，从而进行了一些研究．作者試图在本文中对这些方法进行比較，闡明它們相互之間的关系，与这些方法的偏差情况，并提出若干建議．

关于分层計算矿藏儲量方面，在矿体几何学上（見 [2]—[4]）有 Бауман 公式，截錐公式与梯形公式．設用它們算出来的矿藏体积分别为 v，v_1 与 v_2．本文証明了它們满足不等式：

$$v \leqslant v_1 \leqslant v_2,$$

并且完全确定了取等号的情况．关于这三个公式的比較問題，作者認为主要应从量綱来看，因此我們認为 Бауман 公式的局限性較少．

本文提供了一个双层合算矿藏儲量的公式，这个公式的获得首先在于我們找到了 Бауман 公式的一个新証明．这个証明旣簡单，而又易于进一步改进．它的优点在于比 Бауман 公式麻煩得并不很多，但比 Бауман 公式多考虑了一些因素，同时也比 Соболевский 公式（即通常的双层合算矿藏儲量的公式，見 [2]—[4]）多考虑了一些因素．我們推荐它供我国矿藏儲量計算工作者参考或試用．

关于坡地面积的計算方面，在地理学上常用 Волков 方法（見 [5]—[6]）；在矿体几何学上，則常用 Бауман 方法（見 [1]—[2]）．本文指出，Бауман 方法比 Волков 方法精密，但用这两个方法算出的結果常比眞正的結果偏低．本文完全定出了能够用这两个方法来无限精密地計算其面积的曲面及指出这两个方法的偏差情况．詳言之，偏差依賴于曲面上点的傾角的变化．只有当整个曲面上各点的傾角都相差不大时，Волков 方法才能得到精确結果，而只有当曲面在相邻两等高綫間的点的傾角的变化不大时，Бауман 方法才能給出精密的結果．然而在其他情况下，用这两个方法的誤差就可能比較大了．因此我們建議在等高綫图上通过制高点引进若干条放射綫，当曲面与直紋面相近时，可以分別求出相邻两条放射綫間的表面积，然后总加起来．如果相邻两条等高綫間与相邻两条放射綫間，曲面的傾角的变化都比較大时，可以分別算出由放射綫及等高綫所織成的每一小块的表面积，然后总加起来．这样算出的結果，偏差就比較小了．

* 1960 年 12 月 8 日收到．

§2. 矿藏储量計算

1. Бауман 方法

假定有一张矿藏的等高綫图，高程差是 h，地图上所表示的一圈，实际上便是一定高程的矿体的截面积．我們来估計两张这样的平面之間的矿藏的体积．这两张平面之間的距离便是高程差 h．我們以 A, B 各表示下、上两个等高綫圈所包围的截面（見图 1，它們的面积亦記为 A, B）．Бауман 建議用

$$v=\left[\frac{1}{2}(A+B)-\frac{T(A,B)}{6}\right]h \tag{1}$$

来估算这两个高程間的一片的体积 v，此处 $T(A,B)$ 是用以下方法所画出的图形的面积，称它为 Бауман 改正数．

如图 2 中，从制高点 O 出发，作放射綫 OP，这放射綫在地图上 A, B 之間的长度是 l．另作图 3，取一点 O'，与 OP 同方向取 $O'P'=l$．当 P 延着 A 的周界走一圈时，P' 也得一图形，这图形的面积就称为 Бауман 改正数．因为它依賴于两截面 A 与 B，所以我們用 $T(A,B)$ 来表示它．

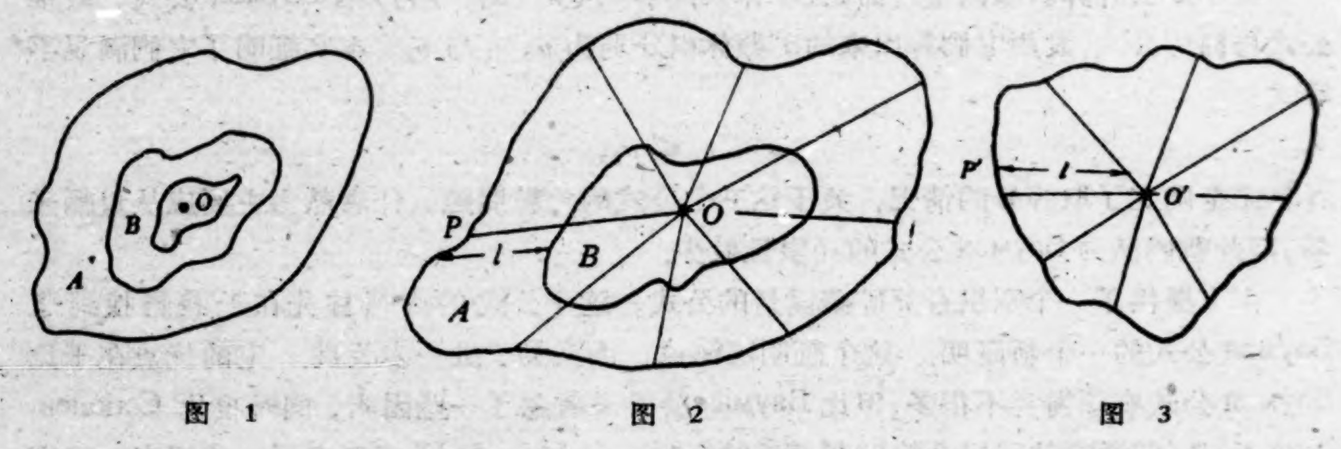


图 1　　　　图 2　　　　图 3

把算出来的矿体体积一片一片地加起来，就得到矿藏的体积 V．換言之，設矿体的等高綫图的 $n+1$ 条等綫所围成的面积依次为 $S_0, S_1, \cdots, S_n$，则矿体的体积 V 由下式来近似計算：

$$V=\left(\frac{S_0+S_n}{2}+\sum_{m=1}^{n-1}S_m\right)h-\frac{h}{6}\sum_{m=0}^{n-1}T(S_m,S_{m+1}), \tag{2}$$

此处 h 为高程差（图 4）．

定理（Бауман）．已知物体的下底 A 与上底 B（其面积亦記为 A, B）均为平面，且 A 平行于 B，h 为它們之間的高，O 为 B 上一点．若用任意通过 O 而垂直于 B 的平面来截物体，所得的截面都是四边形，则物体的体积 v 恰如 (1) 式所示．

証．以 O 为中心，引进极坐标（見图 5）．命高度为 z 的等高綫的极坐标方程为

$$\rho=\rho(z,\theta)\qquad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

其中 $\rho(z,0)=\rho(z,2\pi)$．今后我們常假定 $\rho(z,\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant z\leqslant h)$ 是連續的．我們不妨假定 A, B 的高程各为 0 及 h．并且記

$$\rho_1(\theta)=\rho(0,\theta),\qquad \rho_2(\theta)=\rho(h,\theta).$$

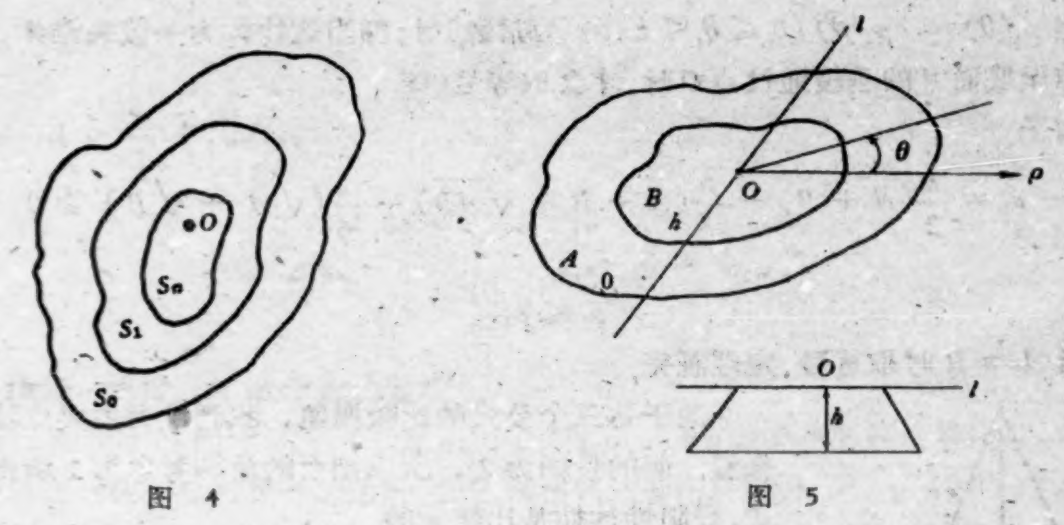


图 4　　　　图 5

由假定可知

$$\rho(z,\theta)=\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\quad(0\leqslant z\leqslant h).$$

因此物体的体积为

$$\frac{1}{2}\int_0^h\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\theta)\,d\theta\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^h\left(\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\right)^2dz\,d\theta=$$

$$=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho_1^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_2^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)}{3}\right)d\theta=\frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)\,d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)\,d\theta\right]-$$

$$-\frac{h}{6}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2\,d\theta\right]=\frac{h}{2}(A+B)-\frac{h}{6}T(A,B).$$

定理証完.

2. Бауман 公式，截錐公式与梯形公式的关系

假定物体的下底 A 与上底 B 均为平面，且 A 平行于 B，h 为它們之間的高，O 为 B 上一点. 除 Бауман 公式外，常用下面两公式来近似計算物体的体积：

$$\text{截錐公式：}v_1=\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB}),\tag{3}$$

$$\text{梯形公式：}v_2=\frac{h}{2}(A+B),\tag{4}$$

通常当 $\frac{A-B}{A}>40\%$ 时，用公式 (3)，而当 $\frac{A-B}{A}<40\%$ 时，用公式 (4).

定理 1. 不等式

$$v\leqslant v_1\leqslant v_2\tag{5}$$

恆成立. 当且仅当物体为截錐，且此錐体的頂点至底面 A 的垂綫通过点 O 时，$v=v_1$；当且仅当 $A=B$ 时，$v_1=v_2$.

証. 如 Бауман 定理中的假定. 由 Бауман 公式及 Буняковский-Schwarz 不等式可知

$$v=\frac{h}{6}\int_0^{2\pi}(\rho_1^2(\theta)+\rho_2^2(\theta)+\rho_1(\theta)\rho_2(\theta))\,d\theta\leqslant\frac{h}{3}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)\,d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)\,d\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sqrt{\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)\,d\theta\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)\,d\theta}\right]=\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB})=v_1,$$

当且仅当 $\rho_1(\theta) = c\rho_2(\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, c 为常数)时；即当这物体为一截头錐体，而此錐体的頂点至底面 A 的垂綫通过点 O 时，才会取等号(图 6).

又由于

$$v_2 - v_1 = \frac{h}{2}(A+B) - \frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB}) = \frac{h}{6}(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2 \geqslant 0,$$

所以

$$v_1 \leqslant v_2,$$

当且仅当 $A = B$ 时取等号. 定理証完.

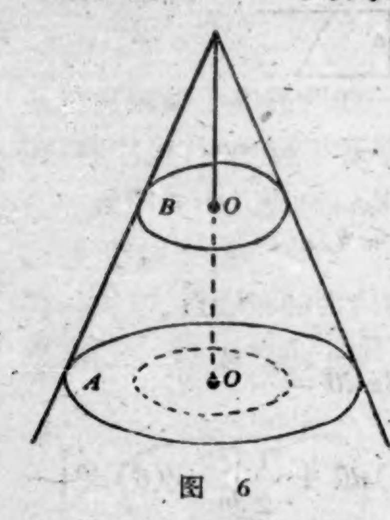


图 6

关于这三个公式的比較問題，我們認为主要应該从量綱来看. 面的量綱为 2，所以把面的量綱考虑为 1 所得出的公式，局限性往往是比較大的.

梯形公式是把中間截面看成上底与下底的算术平均而得到的，所以把面的量綱当作 1.

Бауман 公式則是将中間截面作为量綱 2 来考虑的. 詳言之，它假定了 $\rho(z, \theta)$ 为 $\rho(0, \theta)$ 与 $\rho(h, \theta)$ 关于 z 的綫性关系而得到的(見 1).

截錐公式亦是将中間截面的量綱考虑为 2. 但比 Бауман 公式还多假定了 $\rho(0, \theta) = c\rho(h, \theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$，此处 c 为一常数.

因此我們認为 Бауман 公式更具有普遍性，所以用它来近似計算物体的体积，一般說来，应該比較精确. 但这并不排斥对于某些个别物体，用其他两个公式更恰当些的可能性. 例如有一梯形，其上底与下底的寬度相等(如图 7 所示). 用梯形公式反而能获得它的眞正体积，而用 Бауман 公式与截錐公式来計算，結果就偏低了. 不过，我們注意此时这梯形的截面的量綱为 1 (由于延 y 軸未变).

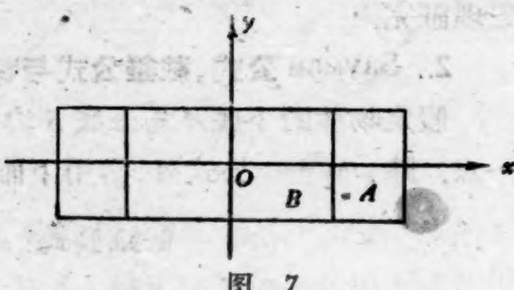


图 7

相对于 Бауман 公式，我們还可以估計用梯形公式与截錐公式的相对偏差.

例如当 $\frac{A-B}{A} < 40\%$ $\left(\text{即 } B > \frac{3}{5}A\right)$ 时，用梯形公式算出的結果相对于 Бауман 公式算出的結果的相对偏差为

$$\Delta = \frac{v_2 - v}{v} = \frac{\frac{1}{2}(A+B)h - \frac{1}{2}(A+B)h + \frac{h}{6}T(A,B)}{\frac{1}{2}(A+B)h - \frac{h}{6}T(A,B)} =$$

$$= \frac{T(A,B)}{3(A+B) - T(A,B)}.$$

因为 $T(A,B) \leqslant A - B$ $\left(\text{即} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\rho_1(\theta) - \rho_2(\theta))^2 d\theta \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho_1^2(\theta)\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho_2^2(\theta) d\theta,\right.$ 此不等式显然成立$\Big)$，所以

$$\Delta \leqslant \frac{A-B}{2A+4B}.$$

再以条件 $B > \frac{3}{5}A$ 代入，得

$$\Delta \leqslant \frac{A-\frac{3}{5}A}{2A+\frac{12}{5}A} = \frac{1}{11} < 10\%.$$

3.建議一个計算矿藏儲量的公式

Бауман 公式是假定 $\rho(z, \theta)$ 为 $\rho(0, \theta)$ 与 $\rho(h, \theta)$ 关于 z 的綫性关系而得到的. 如果我們将两相邻分层放在一起估計，即已知相邻三等高綫 $\rho(0, \theta)$, $\rho(h, \theta)$ 与 $\rho(2h, \theta)$. 我們用通过 $\rho(0, \theta)$, $\rho(h, \theta)$ 与 $\rho(2h, \theta)$ 的抛物綫所形成的曲面 $\rho = \rho(z, \theta)$ 来逼近矿体这两分层的表面，因此我們建議用如下的計算方法.

命 A, B, C 分别表示連續三等高綫所围成的截面（面积亦記为 A, B, C），A 与 B 及 B 与 C 之間的距离都是 h，則这两片在一起的体积可用以下公式来近似計算

$$v_3 = \frac{h}{3}(A + 4B + C) - \frac{h}{15}(2T(A, B) + 2T(B, C) - T(A, C)). \tag{6}$$

如果不計 (6) 式中的第二項，就是熟知的 Соболевский 公式. 把二片二片的体积总加起来，就得到矿藏的总体积 V 的近似公式. 換言之，設矿藏的等高綫图的 $2n+1$ 条等高綫所围成的面积依次为 $S_0, S_1, \cdots, S_{2n}$，而高程差为 h，則矿藏的体积 V 由下式来近似計算

$$V = \frac{h}{3}\left[S_0 + S_{2n} + 4\sum_{i=0}^{n-1} S_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} S_{2i}\right] - \\ - \frac{h}{15}\left[2\sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i}, S_{2i+1}) + 2\sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i+1}, S_{2i+2}) - \sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i}, S_{2i+2})\right]. \tag{7}$$

注意：如果等高綫图含有偶数条等高綫，則最上面一片可以单独估計，其余的用公式(7).

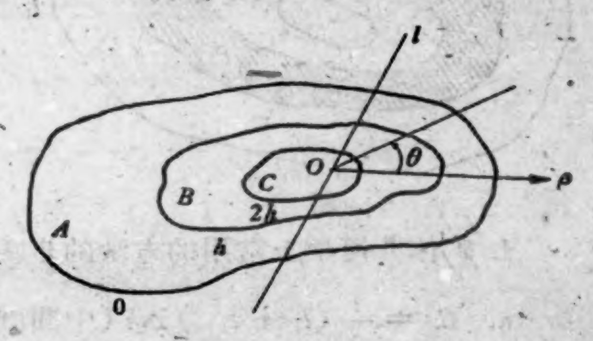




图　8

定理 2. 已知物体的上底 C 与下底 A 均为平面，B 为中間截面（面积亦分别記为C, A, B），且 A, C 都与 B 平行，A 与 B 之間及 B 与 C 之間的距离都是 h, O 为 C 上一点（图 8）. 若用任意通过 O 而垂直于 C 的平面截物体，所得的截面的周界均由两条直綫及两条抛物綫所构成，則物体的体积 v_3 恰如(6)式所示.

証. 以 O 为中心，引进极坐标，命高度为 z 的等高綫的极坐标方程为

$$\rho = \rho(z, \theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad \rho(z, 0) = \rho(z, 2\pi)).$$

不妨假定 A, B, C 的高程分别为 0, h, $2h$，并且記

$$\rho_1(\theta) = \rho(0, \theta), \quad \rho_2(\theta) = \rho(h, \theta), \quad \rho_3(\theta) = \rho(2h, \theta).$$

由假定可知

$$\rho(z,\theta)=\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta)-\frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta)+\frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta). \qquad (8)$$

因此物体的体积 v_3 为

$$\frac{1}{2}\int_0^{2h}\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\theta)d\theta\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2h}\left[\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta)-\frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta)+\frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta)\right]^2dz=$$

$$=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{15}\rho_1^2(\theta)+\frac{16}{15}\rho_2^2(\theta)+\frac{4}{15}\rho_3^2(\theta)+\frac{4}{15}\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{15}\rho_2(\theta)\rho_3(\theta)-\frac{2}{15}\rho_1(\theta)\rho_3(\theta)\right]d\theta=$$

$$=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho_1^2(\theta)}{3}+\frac{4\rho_2^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_3^2(\theta)}{3}-\frac{2}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{15}(\rho_2(\theta)-\rho_3(\theta))^2+\frac{1}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_3(\theta))^2\right]d\theta=$$

$$=\frac{h}{3}(A+4B+C)-\frac{h}{15}(2T(A,B)+2T(B,C)-T(A,C)).$$

定理証完.

§3. 坡地面积計算

4. Бауман 方法及 Волков 方法

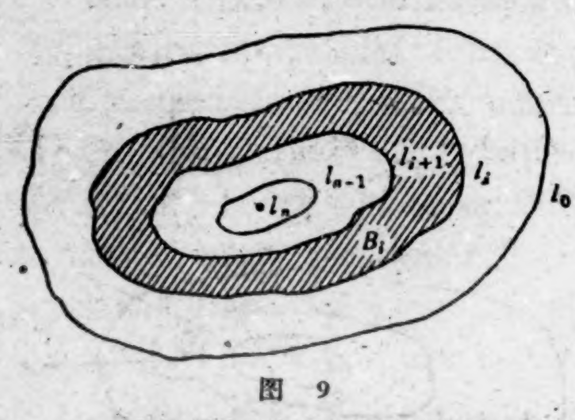


图 9

现在先介紹矿学家及地理学家所常用的方法，假定地图上以 Δh 为高程差画出等高綫，今后我們常假定有一制高点，及等高綫成圈的情况来討論(其他情况也可以十分容易地被推出来). 我們假定由制高点出发，向外一圈一圈地画出等高綫 (l_{n-1}), (l_{n-2}), $\cdots$, (l_0) (图 9). 記 (l_0) 的高度为 0, 而制高点用 (l_n) 表之，它的高度是 h, (l_i) 与 (l_{i+1}) 之間的面积用 B_i 表示(即投影的面积).

I. 矿体几何学上常用的方法的步驟如下:

a. $C_i=\frac{1}{2}(l_i+l_{i+1})\Delta h$ (中間直立隔板的面积);

b. $\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2+C_i^2}$ 就是所求的斜面积的漸近值 (Бауман 方法).

II. 地理学上常用的方法的步驟如下:

a. $l=\sum_{i=0}^{n-1}l_i$ (等高綫的总长度), $B=\sum_{i=0}^{n-1}B_i$ (总投影面积), $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta h\cdot l}{B}$ (平均傾角);

b. $B\sec\alpha=\sqrt{B^2+(\Delta h\cdot l)^2}$ 就是所求的斜面积的漸近式 (Волков 方法).

附記: $\sqrt{a^2+b^2}$ 可以借商高定理，用图解法很快求出.

这两个方法哪一个更好一些？这些方法給出的結果在怎样的程度上迫近斜面积？换句話說，当等高綫的分布趋向无限精密时（也就是 $\Delta h \to 0$ 时），这些方法所給出的結果是什么？是否就是眞正的斜面积呢？一般說来，答案是否定的．仅仅是一些十分特殊的曲面，答案才是肯定的．我們将在下面定出这些曲面，并将給出这些方法和实际結果的相差比例，同时指出避免較大偏差的計算步驟．

5. Ба, Во 与 S 的关系

以制高点 (l_n) 为中心 O，引进极坐标．命高度为 z 的等高綫方程为

$$\rho = \rho(z, \theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

其中 $\rho(z, 0) = \rho(z, 2\pi)$． 我們在今后常假定 $\dfrac{\partial\rho(z, \theta)}{\partial\theta}$ 与 $\dfrac{\partial\rho(z, \theta)}{\partial z}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant h)$ 都是連續的． 命 $z_i = \dfrac{h}{n} i$，則 l_i 所包围的面积等于

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(z_i, \theta) d\theta,$$

所以由中值公式可知

$$B_i = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\rho^2(z_i, \theta) - \rho^2(z_{i+1}, \theta)]\, d\theta = -\int_0^{2\pi} \rho(z_i', \theta)\, \frac{\partial\rho(z_i', \theta)}{\partial z_i'}\, d\theta\, \Delta h,$$

此处 $z_i' \in [z_i, z_{i+1}]$，而 $\Delta h = \dfrac{h}{n}$．另一方面，(l_i) 的长度等于

$$l_i = \int_{(l_i)} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i, \theta) + \left(\frac{\partial\rho(z_i, \theta)}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

由 Бауман 方法所得出的結果是

$$C_i = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i'', \theta) + \left(\frac{\partial\rho(z_i'', \theta)}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta\, \Delta h,$$

这里用了中值公式，$z_i'' \in [z_i, z_{i+1}]$，因此当 $\Delta h \to 0$ 时，$\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 趋近于

$$\text{Ба} = \int_0^h \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} \rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\, d\theta\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta\right)^2}\, dz. \tag{9}$$

这便是用 Бауман 方法算出的斜面积，当 $\Delta h \to 0$ 时所趋向的数值．

又易見

$$B = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(0, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h -\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\, dz$$

（注意：$\rho(h, \theta) = 0$）及 $\Delta h \cdot l$ 的极限应当等于

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{n}\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i, \theta) + \left(\frac{\partial\rho(z_i, \theta)}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta,$$

因此用 Волков 方法算出的斜面积，当 $\Delta h \to 0$ 时，所趋向的数值为

$$\text{Во} = \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h -\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\, dz\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\, dz\right)^2}. \tag{10}$$

由于

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2\right] d\theta^2 + 2\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\frac{\partial \rho}{\partial z}\, d\theta\, dz + \left(1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2\right) dz^2,$$

所以斜面的面积 S 为

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \left(-\rho\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2}\, d\theta. \tag{11}$$

为了比較 Ба, Bo 与 S, 我們引进一个复值函数

$$f(z, \theta) = \rho\frac{\partial \rho}{\partial z} + i\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2}, \tag{12}$$

则得

$$\text{Ба} = \int_0^h \left|\int_0^{2\pi} f(z, \theta)\, d\theta\right| dz, \tag{13}$$

$$\text{Bo} = \left|\int_0^h\int_0^{2\pi} f(z, \theta)\, d\theta\, dz\right|, \tag{14}$$

及

$$S = \int_0^h\int_0^{2\pi} |f(z, \theta)|\, d\theta\, dz. \tag{15}$$

因此显然有不等式

$$\text{Bo} \leqslant \text{Ба} \leqslant S. \tag{16}$$

由此可見: (i) Бауман 方法比 Волков 方法精密; (ii) 所求出的結果比眞正的結果偏低一些; (iii) Бауман 方法旣然偏低,因此可以作如下的修改,卽取 $C_i = l_i \Delta h$. 这样旣簡化了算法而又增大了数值.

现在来考慮 $\text{Bo} = S$ 及 $\text{Ба} = S$ 的曲面,先講下面的引理:

引理. 若 $f(x)$ 为区間 $[a, b]$ 中的复值函数,此处 a, b 均为实数,则等式

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| = \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{17}$$

成立的必要且充分的条件是 $f(x)$ 的虛实部分之比为常数.

証. 命 $f(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$, $\rho(x) \geqslant 0$, 而 $\theta(x)$ 是实函数. 显然如果 $\theta(x)$ 为与 x 无关的常数,则(17)成立. 反之,由于

$$\left(\left|\int_a^b f(x) dx\right|\right)^2 = \int_a^b\int_a^b f(x)\overline{f(y)}\, dx\, dy = \int_a^b\int_a^b \rho(x)\rho(y)e^{i(\theta(x)-\theta(y))}\, dx\, dy =$$

$$= 2\iint\limits_{a<x<y<b} \rho(x)\rho(y)\cos[\theta(x) - \theta(y)]\, dx\, dy,$$

$$\left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^2 = 2\iint\limits_{a<x<y<b} \rho(x)\rho(y) dx\, dy.$$

因而若(17)成立,则必

$$\cos(\theta(x) - \theta(y)) \equiv 1,$$

卽 $\theta(x) \equiv \theta(y)$. 此卽引理所需.

易知对于多重积分,引理依然成立.

由引理可知

$$\text{Bo} = \left|\int_0^{2\pi}\int_0^h f(z, \theta)dz\,d\theta\right| = \int_0^{2\pi}\int_0^h |f(z, \theta)|\,dz\,d\theta = S$$

成立的必要且充分的条件为 $f(z, \theta)$ 的虛实部分之比是常数 c，則得偏微分方程

$$\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 = c^2\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2. \tag{18}$$

换言之，仅有适合这偏微分方程的函数 $\rho = \rho(z, \theta)$，Волков 方法才能給出正确答案．这当然要适合以下的条件：$\rho(h, \theta) = 0$（这是制高点）及 $\rho(0, \theta) = \rho_0(\theta)$（这是曲面的底盘方程）．

我們并不解这偏微分方程，而从它的几何意义入手，把 θ 与 z 看成参变数，即

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta,\quad z = z,$$

而 ρ 是 θ 与 z 的函数，由

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial z}\cos\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial z}\sin\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

得知在曲面上的点 (θ, z) 的法綫方向是

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta, -\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta + \rho\sin\theta, -\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right).$$

由(18)可知它与 z 軸的交角 α（即点 (θ, z) 的傾角）的余弦等于

$$\cos\alpha = \frac{-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 + \rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}$$

是一常数．也就是說，这曲面的切平面与地平面（即 xy 平面）成一固定角度 α．我們来說明这样的曲面的几何性質．

从制高点向 xy 平面作任一垂直平面，这平面与該曲面的交綫有次之性質．这曲綫上每一点的切綫与 xy 平面的交角为 α．因此，它是一条直綫．

从任一平面封閉曲綫 (l_0) 作底盘，以任一投影在盘內的点 (l_n) 作制高点．通过制高点与底盘垂直的直綫称为軸．通过 (l_0) 上任一点 A 作一直綫，它在 A 与軸所成的平面上，与底盘的交角是 α．这样直綫所成的图形便是适合 Bo $= S$ 的图形．

所以，如果有最高峯，而且向下看沒有陡峭的角度，則仅有以下的曲面才能 Bo $= S$：底盘是圓或圓的若干切綫形成的多角形或一些圓弧及一些切綫所形成的图形，軸的尖端在通过圓心而垂直于底盘的直綫上（見图 10）．

通俗些說，只有蒙古包，金字塔和一些由此复合出来的图形，才能由 Волков 方法来无限逼近．

但什么时候 Ба $= S$ 呢？当然 Bo $= S$ 的时候 Ба $= S$，除掉上面所求的曲面，还有其他曲面否？答案：有．証明如下：从

$$\text{Ба} = \int_0^h\left|\int_0^{2\pi} f(z, \theta)d\theta\right|dz = \int_0^h\int_0^{2\pi} |f(z, \theta)|\,d\theta\,dz = S$$

得出

$$\int_0^h\left(\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|\,d\theta-\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)\,d\theta\right|\right)dz=0.$$

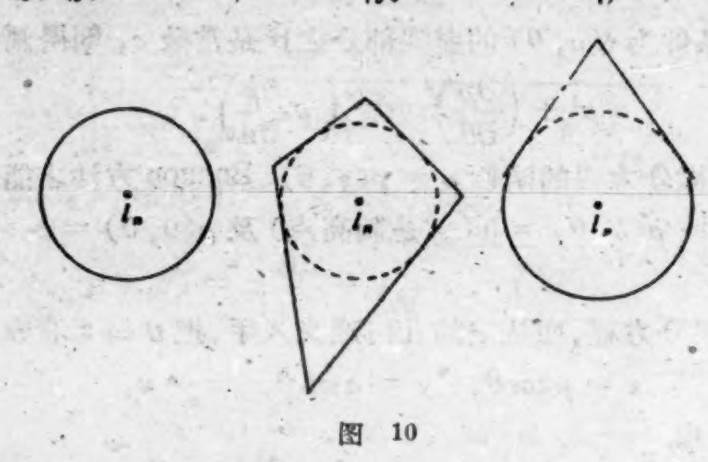


图 10

因为积分号下的函数是非负的. 因此对任一 z 常有

$$\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|\,d\theta=\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)\,d\theta\right|.$$

因此当固定 z 时, $f(z,\theta)$ 的虚实部分之比是常数, 即方程 (18) 中的 c 是仅为 z 的函数. 所以仅有下面的曲面才能 Ба $=S$: 高程相同之处,曲面有相同的傾角. 用通俗的話說,只有葫芦,白塔(北海),才能由 Бауман 方法来无限逼近.

现在我們来估計一下这两个方法給出的結果的偏差情况. 假定曲面上点的傾角的余弦介于两正常数 ξ 与 η 之間,即

$$\xi\leqslant\cos\alpha\leqslant\eta,$$

即

$$\xi\leqslant\frac{-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}}\leqslant\eta,$$

由此可得

$$\frac{\rho^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}{\left(\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}\geqslant1-\eta^2,$$

因而

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\,dz\,d\theta\geqslant\sqrt{1-\eta^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\sqrt{\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}\,dz=$$

$$=\sqrt{1-\eta^2}\,S,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\,dz\,d\theta\geqslant\xi S,$$

因此

$$\text{Bo}\geqslant\sqrt{\xi^2S^2+(1-\eta^2)S}=\sqrt{1+\xi^2-\eta^2}\,S.$$

又因为 $1 > \eta \geqslant \xi > 0$，所以

$$\frac{\xi}{\eta} \leqslant \sqrt{1 + \xi^2 - \eta^2}$$

（将两端平方，此式即 $(\eta^2 - \xi^2)(1 - \eta^2) \geqslant 0$）即得

$$\text{Bo} \geqslant \frac{\xi}{\eta} S.$$

总而言之，我們証明了下面的定理.

定理 3. 若曲面 $\rho = \rho(z, \theta)$ $(0 \leqslant z \leqslant h,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 上任一点的傾角 α 的余弦都满足 $0 < \xi \leqslant \cos\alpha \leqslant \eta$，則不等式

$$\frac{\xi}{\eta} S \leqslant \text{Bo} \leqslant \text{Бa} \leqslant S \tag{19}$$

成立. $\text{Bo} = S$ 的充要条件是曲面的任意点都有相同的傾角，$\text{Бa} = S$ 的充要条件是曲面在高程相等处的点有相同的傾角.

6. 算法建議

由定理 3 可以看出只有当曲面上的点的傾角变化不大时，Волков 方法才能得到精确結果，而只有当曲面在相邻两高程間的点的傾角相差不大时，Бауман 方法才能給出精密的結果，然而在其他情况下，用这种方法的誤差就可能比較大了.

因此我們建議如下的算法：在等高綫图上（图 11），通过制高点 l_n 引进若干条放射綫 $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{m-1}$，其中 θ_j 的幅角等于 $\frac{2\pi j}{m}$. 放射綫 θ_j, θ_{j+1} 与等高綫 l_i, l_{i+1} 所围成的面积記为 d_{ij}；l_i 被 θ_j 与 θ_{j+1} 所截取的一段的长度記之为 l_{ij}.

方法 I.　a.　$D_j = \sum_{i=0}^{n-1} d_{ij}$（等高綫图在放射綫 θ_j 与 θ_{j+1} 之間的面积）；

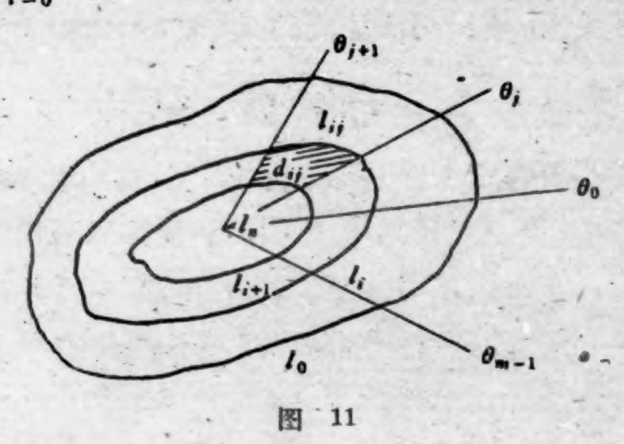


图　11

b.　$E_j = \left(\sum_{i=0}^{n-1} l_{ij}\right) \Delta h$（中間隔板在两直立墻壁之間的面积之和）；

c.　$\sigma_1 = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{D_j^2 + E_j^2}$ 就是所求曲面面积的漸近值.

方法 II.　a.　$e_{ij} = l_{ij} \Delta h$（中間隔板在两直立墻壁之間的面积）；

b.　$\sigma_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{d_{ij}^2 + e_{ij}^2}$ 就是所求曲面面积的漸近值.

与上段相同的方法可知

$$K=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\int_0^h-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}dz\right)^2+\left(\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}dz\right)^2}d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|\int_0^h f(z,\theta)\,dz\right|d\theta \tag{20}$$

及

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}dz\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^h|f(z,\theta)|\,dz\,d\theta \tag{21}$$

分別为当 $n\to\infty$, $m\to\infty$ 时, σ_1 与 σ_2 所趋近的数 (关于 $f(z,\theta)$ 的定义請参看(12)式).

显然 $\mathrm{Bo}\leqslant K\leqslant S$ (見 (10)), 同上段的方法可知 $K=S$ 的充要条件为曲面为直紋面. 由于 σ_2 趋于眞面积, 所以方法 II 最为精密可靠.

参　考　文　献

[1] В. И. Бауман, К вопросу о подсчета запасов полезных ископаемых, *Горный журнал*, Декабрь, 1908.
[2] 烏沙闊夫 (И. Н. Ушаков), 矿藏几何学, 煤炭工业出版社, 1957.
[3] 雷若夫 (П. А. Рыжов), 矿体几何学, 地质出版社, 1957.
[4] 依札克松 (С. С. Изаксон), 矿产儲量計算的驗算和計算誤差的确定, 煤炭工业出版社, 1958.
[5] 伏尔科夫 (Н. М. Волков), 量图原理和方法, 1950.
[6] 陆漱芬, 在等高綫地图上計算地表面面积的問題, 测量制量学报, 4 卷 1 期, 1960.

第11卷 第1期　　数 学 学 报　　Vol. 11, No. 1
1961年3月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　March, 1961

关於高維射影空間共軛网論的研究(II)*

苏 步 青
(复旦大学及中国科学院上海数学研究所)

§1. 引　　言

本文是継前文[1]来討論 n 維射影空間 S_n $(n \geqslant 4)$ 的共軛网有关的一些性质,特别是第 k 类共軛和調和性质. 我們已經闡明,当 $k=1$ 时,这些性质变为普通共軛性质和調和性质. 这里,很自然地发生一个問題: 当一个拉普拉斯叙列 $\{\cdots X_3X_1X_2X_4\cdots\}$ 是另一个拉普拉斯叙列 $\{\cdots A_3A_1A_2A_4\cdots\}$ 的第 k 类内接叙列时,能不能在这两个之間嵌入 $k-1$ 个 $(k>1)$ 拉普拉斯叙列 $\{\cdots A_3^{(h)}A_1^{(h)}A_2^{(h)}A_4^{(h)}\cdots\}$ $(h=1,2,\cdots,k-1)$,使一个内接着一个而且最后的一个内接于 $\{\cdots A_3A_1A_2A_4\cdots\}$ 呢? 我們将証明,問題中的嵌入完全可能,这也就是說,第 k 类共軛和調和图形是可以分解成为 k 个普通共軛和調和图形的鎖鏈的.

在第2节里首先叙述有关于第2类共軛叙列的一些公式, 以弥补前文的不足. 对于第 k 类共軛叙列同样可以导出对应的公式,但是为簡单起見,这里只就第3类共軛叙列証明上述的結果. 为了便于建立嵌入的方法,即法甫系統的解的存在定理,我們在第3节考察如何从一个第2类共軛叙列經过普通直綫汇的共軛网作图法来导出第3类共軛叙列的过程,并应用逆的过程 (見第4节) 求出一个中間叙列, 它一方面外接于这个第3类共軛叙列;另一方面又是原叙列的一个第2类共軛叙列.

最后还要指出, 从嵌入問題的解决同时也解决了鑲边問題, 即从一个已知的叙列 $\{\cdots A_3A_1A_2A_4\cdots\}$ 找出一个叙列,使前者是后者的第 k 类共軛叙列. 因为我們只要連續作出 k 个第1类(普通)共軛直綫汇就够了,問題归結到普通的作图.

§2. 記号和公式

基本上采用前文的記号. 設 (A_1) 是 S_n 的一个已知共軛网,而且 $\{\cdots A_7A_5A_3A_1A_2A_4A_6A_8\cdots\}$ 是附属于 (A_1) 的拉普拉斯叙列(以下簡称叙列 A),那末我們有

$$
\left.\begin{aligned}
dA_1 &= \omega_{11}A_1 + a_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3,\\
dA_2 &= b_1\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4,\\
dA_3 &= c_3\omega_2A_1 + \omega_{33}A_3 + b_3\omega_1A_5,\\
dA_4 &= c_4\omega_1A_2 + \omega_{44}A_4 + b_4\omega_2A_6,\\
dA_5 &= c_5\omega_2A_3 + \omega_{55}A_5 + b_5\omega_1A_7,\\
dA_6 &= c_6\omega_1A_4 + \omega_{66}A_6 + b_6\omega_2A_8,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
dA_i &= \sum_{j=1}^{n+1}\omega_{ij}A_j,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\qquad(1)
$$

* 1960年12月21日收到.

其中各法甫形式 ω_{ij} 满足可积分条件

$$D\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} [\omega_{ik}\omega_{kj}]. \tag{2}$$

特别地导出如下的公式:

$$\left.\begin{aligned} D\omega_1 &= [\omega_{11} - \omega_{33}, \omega_1], \\ D\omega_2 &= [\omega_{22} - \omega_{44}, \omega_2]; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} D(\omega_{44} - \omega_{11}) &= (c_4 - b_4c_6 + a_1b_1 - c_3)[\omega_1\omega_2], \\ D(\omega_{44} - \omega_{22}) &= (2c_4 - b_4c_6 - a_1b_1)[\omega_1\omega_2]; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$[da_1\omega_2] = a_1[\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{22}, \omega_2], \tag{5}$$

$$[db_1\omega_1] = b_1[\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{11}, \omega_1]; \tag{6}$$

$$[db_4\omega_2] = b_4[2\omega_{44} - \omega_{22} - \omega_{66}, \omega_2], \tag{7}$$

$$[dc_4\omega_1] = c_4[\omega_{44} + \omega_{33} - \omega_{22} - \omega_{11}, \omega_1]. \tag{8}$$

现在考察叙列 A 的一个第 2 类共軛网(X)和它的附属叙列X:$\{\cdots X_1XYY_1\cdots\}$,其中进行顺序是与叙列 A 一致的，或者更詳細地說, X 在平面$(A_3A_1A_2)$上; Y 在平面$(A_1A_2A_4)$上; Y_1 在平面$(A_2A_4A_6)$上; X_1 在平面$(A_5A_3A_1)$上,等等. 如前文所証,置

$$\left.\begin{aligned} X &= \mu A_1 + \nu A_3 - A_2, \\ Y &= \sigma A_1 + \tau A_2 - A_4; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

便获得这些系数 μ, ν, σ 和 τ 所滿足的法甫方程組:

$$\left.\begin{aligned} d\mu &= \mu(\omega_{22} - \omega_{11}) + \{\sigma - c_3\nu + \mu(\tau - a_1\mu)\}\omega_2 + p\omega_1, \\ d\nu &= \nu(\omega_{22} - \omega_{33}) + \nu(\tau - a_1\mu)\omega_2 + q\omega_1, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} d\sigma &= \sigma(\omega_{44} - \omega_{11}) + \left(\frac{\mu\sigma}{\nu} - b_1\tau\right)\omega_1 + x\omega_2, \\ d\tau &= \tau(\omega_{44} - \omega_{22}) + \left(c_4 - \frac{\sigma}{\nu}\right)\omega_1 + y\omega_2, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中已导入了四个輔助函数 p, q, x, y.

如果把 (10),(11) 的两側都外导微一次并应用这些方程本身和(3)—(8)以及一些类似公式到外导微后的方程中去,那末获得

$$\left.\begin{aligned} &[dp - p(\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{11}) - \{(2a_1b_1 - c_3 - 2a_1p)\mu + \tau(p - b_1) - qc_3\}\omega_2, \omega_1] = 0, \\ &[dq - q(\omega_{22} - \omega_{11}) - \{\nu(a_1b_1 + c_3 - b_3c_5 - a_1p) + q(\tau - a_1\mu) - \sigma\}\omega_2, \omega_1] = 0; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[dx - x(2\omega_{44} - \omega_{11} - \omega_{22}) - \left\{\frac{\mu x}{\nu} - b_1y + \sigma\left(\frac{\sigma}{\nu} - c_4 + b_4c_6 - a_1b_1\right)\right\}\omega_1, \omega_2\right] = 0, \\ &\left[dy - 2y(\omega_{44} - \omega_{22}) - \left\{(\sigma\tau - a_1\mu\sigma - x)\frac{1}{\nu} - \tau(2c_4 - b_4c_6 - a_1b_1)\right\}\omega_1, \omega_2\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

为了找寻点 Y_1 的坐标,我們仍旧沿用 d_1 和 d_2 分別表示沿方向 $\omega_1 = 0$ 和 $\omega_2 = 0$ 的微分. 从(9)—(11)容易得到

$$d_1Y = (\sigma\omega_{44}' + x\omega_2)A_1 + (a_1\sigma\omega_2 + \tau\omega_{44}' + y\omega_2)A_2 + (\tau\omega_2 - \omega_{44}')A_4 - b_4\omega_2A_6 \tag{14}$$

并由(9)和(14)消去 A_1 的結果,

$$\sigma d_1Y = (*)Y + \omega_2Y_1, \tag{15}$$

这里我們已置

$$Y_1 = (a_1\sigma^2 + \sigma y - \tau x)A_2 + (x + \sigma\tau)A_4 - b_4\sigma A_6. \tag{16}$$

根据前文的定理，这就是所求的点 Y_1.

§3. 第 k 类共軛叙列的延拓

假設$\{\cdots X_1XYY_1\cdots\}$是叙列 A 的第 k 类共軛叙列，其中 $k \geqslant 1$. 在直綫汇 Γ_{XY} 的射綫 XY 上选取这样的点 $\mathfrak{X}$，使它画成共軛网($\omega_1 = 0; \omega_2 = 0$)，也就是使这网与直綫汇 Γ_{XY} 共軛. 按照已知的定理[2]，$\mathfrak{X}$ 沿 d_1 的拉普拉斯变换点 $\mathfrak{Y}$ 必須落在直綫 YY_1 之上. 可是 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 分别是 $S'_{k+1} \equiv [A_3A_1A_2A_4\cdots A_{2k}]$ 和 $S''_{k+1} \equiv [A_1A_2A_4\cdots A_{2k+2}]$ 的点，并且互为拉普拉斯变换，所以叙列$\{\cdots \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1\cdots\}$一定是叙列 A 的一个第 $k+1$ 类共軛叙列. 我們称叙列 $\mathfrak{X}$ 为叙列 X 的**第一延拓**.

上述的結果也可以用直接的験算加以証实. 为簡便起見，仅考察 $k = 2$ 的情况，且从而应用前节的公式进行計算. 这样做，还有一个好处，就是为下节所述的嵌入定理的証明准备了条件.

我們的問題是找寻两个函数 λ 和 λ_1，使得

$$\mathfrak{X} = \lambda X + Y \text{ 和 } \mathfrak{Y} = \lambda_1 Y + Y_1 \tag{17}$$

满足下列条件:

$$d_1\mathfrak{X} = \tilde{\omega}_1\mathfrak{X} + \tilde{\omega}_2\mathfrak{Y}, \quad d_2\mathfrak{Y} = \bar{\omega}_1\mathfrak{X} + \bar{\omega}_2\mathfrak{Y}, \tag{18}$$

其中 $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2; \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ 是某些法甫形式.

从(9)和(16)得出

$$\mathfrak{X} = \lambda\nu A_3 + (\lambda\mu + \sigma)A_1 + (\tau - \lambda)A_2 - A_4, \tag{19}$$

$$\mathfrak{Y} = \lambda_1\sigma A_1 + (\lambda_1\tau + a_1\sigma^2 + \sigma y - \tau x)A_2 + (x + \sigma\tau - \lambda_1)A_4 - b_4\sigma A_6. \tag{20}$$

由于这些点必須满足(18)，把(19)和(20)代进(18)之一，例如$(18)_1$并比較两側关于 $A_i (i = 1, 2, \cdots, 6)$的对应系数；首先从 A_5 的系数得出 $(\lambda\nu b_3 \neq 0)$ $\omega_1 = 0$，就是 d_1 所表示的方向；其次从 A_6 和 A_4 的系数得到

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{1}{\sigma}\omega_2, \quad \tilde{\omega}_1 = \omega'_{44} + \left(\frac{x}{\sigma} + \lambda - \frac{\lambda_1}{\sigma}\right)\omega_2. \tag{21}$$

又从 A_2 和 A_3 导出的方程都是

$$d_1\lambda = \lambda(\omega'_{44} - \omega'_{22}) + \lambda\left(a_1\mu + \frac{x}{\sigma} - \tau + \lambda - \frac{\lambda_1}{\sigma}\right)\omega_2. \tag{22}$$

最后，利用(22)来检查两边关于 A_1的系数，容易看出这結果是与$(21)_2$等价的.

同样，对$(18)_2$进行类似的計算，除了 d_2 表示方向 $\omega_2 = 0$ 和两形式 $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$被决定为

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\lambda_1\sigma}{\lambda\nu}\omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = 3\omega''_{44} - \omega''_{11} - \omega''_{22} + \left(\frac{\mu}{\nu} - b_1\frac{\tau}{\sigma}\right)\omega_1 \tag{23}$$

而外，仅仅得到(22)的类似方程

$$d_2\lambda_1 = (2\omega''_{44} - \omega''_{11} - \omega''_{22})\lambda_1 + \left\{\lambda_1\left(\frac{\mu}{\nu} + \frac{\sigma}{\lambda\nu} - \frac{b_1\tau}{\sigma}\right) + b_1\left(\frac{\tau}{\sigma}x - y - a_1\sigma\right)\right\}\omega_1. \tag{24}$$

这样一来，驗証了叙列 $\{\cdots \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1\cdots\}$ 是原叙列 A 的一个第 3 类共軛叙列.

§4. 嵌入問題

为了討論前节的逆問題，为方便起見仅考察第 3 类共軛叙列 $\{\cdots \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1\cdots\}$ 的情况，但是所采取的方法仍旧适用于一般的第 k 类共軛叙列.

設給定了一个第 3 类共軛叙列，其中

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X} &= \mu_3 A_3 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 - A_4,\\ \mathfrak{Y} &= \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \nu_4 A_4 - b_4 \sigma A_6,\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

而且各系数都是已知函数.

以 d_1 和 d_2 分別表示方向 $\omega_1 = 0$ 和 $\omega_2 = 0$，我們有

$$\left.\begin{aligned}d_1\mathfrak{X} &= \tilde{\omega}\mathfrak{X} + \tilde{\omega}_2\mathfrak{Y},\\ d_2\mathfrak{Y} &= \bar{\omega}_1\mathfrak{X} + \bar{\omega}_2\mathfrak{Y}.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

把 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 的坐标(25)代到(26)的两边，并按照(1)改写各方程的左边. 經过两边的对应系数比較之后，获得关于(25)和(26)中的系数以及法甫形式的一系列条件. 首先从 $(26)_1$ 导出

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 &= \left(\frac{\nu_4}{\sigma} - \mu_2\right)\omega_2 + \omega'_{44},\\ \tilde{\omega}_2 &= \frac{\omega_2}{\sigma};\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}d_1\mu_1 &= \mu_1(\omega'_{44} - \omega'_{11}) + \left\{\frac{\nu_1}{\sigma} - c_3\mu_3 + \mu_1\left(\frac{\nu_4}{\sigma} - \mu_2\right)\right\}\omega_2,\\ d_1\mu_2 &= \mu_2(\omega'_{44} - \omega'_{22}) + \left\{\frac{\nu_2}{\sigma} - a_1\mu_1 + \mu_2\left(\frac{\nu_4}{\sigma} - \mu_2\right)\right\}\omega_2,\\ d_1\mu_3 &= \mu_3(\omega'_{44} - \omega'_{33}) + \mu_3\left(\frac{\nu_4}{\sigma} - \mu_2\right)\omega_2.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

从 $(26)_2$ 同样可以导出类似的关系式. 由于 $(25)_2$ 中的各系数的比值是主要的，对其中一个例如 σ 还可添上某些条件. 为了下文的計算方便起見，我們假定 σ 和另一輔助函数 τ 滿足下列的方程組：

$$\left.\begin{aligned}d\sigma &= \sigma(\omega_{44} - \omega_{11}) + \left(\frac{\mu\sigma}{\nu} - b_1\tau\right)\omega_1 + x\omega_2,\\ d\tau &= \tau(\omega_{44} - \omega_{22}) + \left(c_4 - \frac{\sigma}{\nu}\right)\omega_1 + y\omega_2,\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

式中 x, y, μ, ν 都是待定的一些函数.

这样一来，我們改写所获得的关系式为所要的形式：

$$\left.\begin{aligned}\bar{\omega}_1 &= \frac{\nu_1}{\mu_3}\omega_1,\\ \bar{\omega}_2 &= 3\omega''_{44} - \omega''_{11} - \omega''_{22} + \left(\frac{\mu}{\nu} - b_1\frac{\tau}{\sigma}\right)\omega_1;\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$
\left.\begin{aligned}
d_2\nu_1 &= \nu_1(3\omega_{44}'' - 2\omega_{11}'' - \omega_{22}'') + \left\{\frac{\mu_1\nu_1}{\mu_3} - b_1\nu_2 + \left(\frac{\mu}{\nu} - b_1\frac{\tau}{\bar\sigma}\right)\nu_1\right\}\omega_1,\\
d_2\nu_2 &= \nu_2(3\omega_{44}'' - \omega_{11}'' - 2\omega_{22}'') + \left\{\frac{\mu_2\nu_1}{\mu_3} - c_4\nu_4 + \left(\frac{\mu}{\nu} - b_1\frac{\tau}{\bar\sigma}\right)\nu_2\right\}\omega_1,\\
d_2\nu_4 &= \nu_4(2\omega_{44}'' - \omega_{11}'' - \omega_{22}'') + \left\{b_4c_6\bar\sigma - \frac{\nu_1}{\mu_3} + \left(\frac{\mu}{\nu} - b_1\frac{\tau}{\bar\sigma}\right)\nu_4\right\}\omega_1.
\end{aligned}\right\} \tag{31}
$$

我們的問題是：能不能导找一个第 2 类共軛叙列 $\{\cdots X_1XYY_1\cdots\}$ 使得原来的叙列 $\{\cdots \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1\cdots\}$ 变为它的共軛叙列呢？如可能，二点 X 和 Y 必須决定于方程(9)，即

$$
\left.\begin{aligned}
X &= \mu A_1 + \nu A_3 - A_2,\\
Y &= \sigma A_1 + \tau A_2 - A_4,
\end{aligned}\right\} \tag{32}
$$

而且 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 决定于方程(17)，即

$$
\mathfrak{X} = \lambda X + Y,\quad \mathfrak{Y} = \lambda_1 Y + Y_1, \tag{33}
$$

式中 Y_1 决定于方程(16)，即

$$
Y_1 = (a_1\sigma^2 + \sigma y - \tau x)A_2 + (x + \sigma\tau)A_4 - b_4\sigma A_6. \tag{34}
$$

这样，比較(25)和(19)，(20)的結果，便有

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda\nu = \mu_3,\ \lambda\mu + \sigma = \mu_1,\ \tau - \lambda = \mu_2,\\
\lambda_1\sigma = \nu_1, \lambda_1\tau + a_1\sigma^2 + \sigma y - \tau x = \nu_2,\\
x + \sigma\tau - \lambda_1 = \nu_4
\end{aligned}\right\} \tag{35}
$$

和

$$
\sigma = \bar\sigma. \tag{36}
$$

从(35)解出 $\lambda, \mu, \nu; \lambda_1, x, y$:

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda &= \tau - \mu_2,\\
\mu &= \frac{\mu_1 - \bar\sigma}{\tau - \mu_2},\\
\nu &= \frac{\mu_3}{\tau - \mu_2};
\end{aligned}\right\} \tag{37}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\nu_1}{\bar\sigma},\\
x &= \nu_4 + \frac{\nu_1}{\bar\sigma} - \bar\sigma\tau,\\
y &= \frac{1}{\bar\sigma}(\nu_2 + \tau\nu_4) - a_1\bar\sigma - \tau^2.
\end{aligned}\right\} \tag{38}
$$

我們只須証明，由(37)和(38)决定的六函数滿足方程(22)，(10)，(24)，(13)且从而由(32)导出的叙列 $\{\cdots X_1XYY_1\cdots\}$ 一方面是以給定的叙列 $\{\cdots\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1\cdots\}$ 做它的第 1 类共軛叙列的；另一方面它本身又是叙列 A 的第 2 类共軛叙列.

实际上，按照$(29)_2$，$(28)_2$和(35)容易証明

$$
d_1\lambda = d_1\tau - d_1\mu_2 = \lambda(\omega_{44}' - \omega_{22}') + \lambda\left(a_1\mu + \frac{x}{\sigma} - \tau + \lambda - \frac{\lambda_1}{\sigma}\right),
$$

即(22). 按照(28)，(29)和(35)又可驗証方程(10). 同样，从$(31)_1$，$(29)_1$和(35)导出

(24)；从$(31)_3$，$(35)_6$和(29)导出$(13)_1$；最后从$(35)_5$，$(31)_2$，$(29)_1$，$(29)_2$，(24)和$(5)_1$导出$(13)_2$.

当叙列$\{\cdots \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1\cdots\}$是已給定的时候，函数$\sigma$和$\tau$决定于法甫方程組(29)，而且其他函数$\lambda,\mu,\nu;\lambda_1,x,y$按(37)和(38)都跟着决定了，所以嵌入的叙列$\{\cdots X_1XYY_1\cdots\}$是和一个变数的两个任意函数有关的.

以上的方法也适用于第k类共軛叙列$\{\cdots \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1\cdots\}$的情况. 經过$l(<k)$回逐次嵌入之后，我們获得一个第$k-l$类共軛叙列，它是和一个变数的$2l$个任意函数有关的. 这样一来，我們証明了

嵌入定理. 設拉普拉斯叙列A的一个第k类共軛叙列$\mathfrak{X}$是已給定的，这里$k>l\geqslant 1$. 那末，我們可以嵌入一个第$k-l$类共軛叙列X，使叙列$\mathfrak{X}$是它的第l类共軛叙列，并且叙列X是和一个变数的$2l$个任意函数有关的. 特别是，在两叙列A和$\mathfrak{X}$之間可以嵌入$k-1$个共軛叙列，使每两个相邻叙列构成第一类共軛关系.

参 考 文 献

[1] 苏步青，关于高維射影空間共軛网論的研究(I)，数学学报，9 (1959)，446—454.
[2] 苏步青，关于高維空間共軛网論的一个注記，科学記录(新輯)，3 (1959)，359—362.

第11卷 第1期　　数 学 学 报　　Vol. 11, No. 1
1961 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　March, 1961

活动受限制下的非协作对策*

吴 文 俊
（中国科学院数学研究所）

§1. 引　　言

設 Γ 是一 n 人对策，第 i 人的策略空間是 S_i，贏得函数是 $H_i(x_1, \cdots, x_n)$，$x_i \in S_i$，$i = 1, \cdots, n$. 命 S_i^* 为第 i 人的一个混合策略集，而 $H_i^*(\mu_1, \cdots, \mu_n)$，$\mu_i \in S_i^*$，为其相应数学期望. 按 Nash[5]，策略組 $\mu^* = (\mu_1^*, \cdots, \mu_n^*)$ 称为对策 $\Gamma = \langle I, \{S_i\}, \{H_i\}\rangle$（这里 $I = \{1, \cdots, n\}$ 是对策者集）的一个平衡局势，如果对每一 $\mu_i \in S_i^*$，$i = 1, \cdots, n$，有

$$H_i^*(\mu_1^*, \cdots, \mu_n^*) \geqslant H_i^*(\mu_1^*, \cdots, \mu_i, \cdots, \mu_n^*), \quad i = 1, \cdots, n.$$

換言之，这些策略 μ_i^* 的选择使第 i 人无意改变他的策略，只要其余对策者不改变他們的策略的話. Nash 关于对策論的一条基本定理[5]說：如果每一 S_i 都是有限集，而 S_i^* 是所有可能的混合策略的集合，则对策的平衡局势必然存在. Glicksberg[3] 曾将此定理推广至下述情形：S_i 都是 Hausdorff 复紧空間，S_i^* 是 S_i 上所有 Borel 集所成 σ-域上一切正則概率测度的集体，而 H_i 都是积空間 $S_1 \times \cdots \times S_n = S$ 上的連續函数.

在 Nash 与 Glicksberg 的情形中，(混合)策略的选择与改变因之都是任意的. 但若假定策略的选择与改变都受有某种限制，則应更接近于現实. 本文目的即在討論这种所謂活动受限制下的对策的平衡局势，这种对策的精确定义見 §8. 如本文所示，这种对策的平衡局势可以不存在，而且决定平衡局势存在与否的主要因素应該是活动限制区域間錯綜复杂的关系，而与策略空間本身的复杂程度无关. 特別在 Nash-Glicksberg 情形下所以能保証平衡局势的存在，正是因为限制区域十分簡单的緣故，这时的限制区域事实上只有一个，即各对策者的对策空間全部，虽然这时的对策空間本身可以是任意 Hausdorff 复紧空間.

§8 中主要定理的証明依循着奠基于 Kakutani 定点定理推广的通常推理. 但这里需用到代数拓扑中远为深刻的工具，对此可参考 J. Leray 原著[4]. 关于泛函方面，我們主要引征[2]一书.

§2. 概率测度的支柱

設 X 是一 Hausdorff 复紧空間，而 $B(X)$ 是 X 上一切 Borel 集所成的 σ-域. 对定义在 $B(X)$ 上的任一正則概率测度 μ，我們将以 $[\mu]$ 表所有点 $x \in X$ 的集合，对这些点 x 的任一鄰域 U 有 $\mu(U) \neq 0$. 我們称这一集合为 μ 的支柱.

* 1961 年 1 月 6 日收到.

引理. X 中 $B(X)$ 上一个正則概率测度 μ 的支柱$[\mu]$满足以下性質:

1) $[\mu]$是X的閉集.

2) $[\mu]$是X中使 $\mu(F)=1$ 的一切閉集F的交.

3) 对包含$[\mu]$的任意开集U有 $\mu(U)=1$.

4) $\mu([\mu])=1$.

5) $\mu(X-[\mu])=0$.

6) $[\alpha\mu+\beta\nu]\subset[\mu]\cup[\nu]$, 这里 μ, ν 是 $B(X)$ 上任两正則概率测度, α, β 是任两实数,满足 $\alpha, \beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$.

証　由定义, 若 $x\overline{\in}[\mu]$, 則 x 有一邻域 U_x 使 $\mu(U_x)=0$, 于是任一 U_x 中的 x' 都 $\overline{\in}[\mu]$. 因之 $X-[\mu]$ 是开集或$[\mu]$是閉集,而1)得証.

命G为X中使 $\mu(F)=1$ 的一切閉集F的交集. 若 $x\overline{\in}G$, 則有一閉集 $F\subset X$ 使 $x\overline{\in}F$, 而 $\mu(F)=1$. 因之对任一与F不相遇的 x 的邻域 U_x 有 $\mu(U_x)=0$. 由定义有 $x\overline{\in}[\mu]$, 故 $[\mu]\subset G$. 另一方面,若 $x\overline{\in}[\mu]$, 則有含 x 的开集 U_x 使 $\mu(U_x)=0$. 因之对閉集 $F=X-U_x$ 有 $\mu(F)=1$. 因 $x\overline{\in}F$,故更有 $x\overline{\in}G$. 由此得$[\mu]\supset G$. 故$[\mu]=G$ 而2)得証.

命U为任一包含$[\mu]$的开集. 由定义与1)对任意 $x\overline{\in}U$ 应有含 x 的开集 U_x 使 $\mu(U_x)=0$ 与 $U_x\cap[\mu]=\phi$. 这些 U_x 的全体构成 $X-U$ 的一个开复蓋. 因X是复紧的, 故 $X-U$ 也是复紧的, 因之有有限 $U_i=U_{x_i}$, $i=1,\cdots,n$, 使 $\{U_i\}$ 已足以构成 $X-U$ 的一个开复蓋. 于是 $\mu(X-U)\leqslant\sum\mu(U_i)=0$, $\mu(X-U)=0$ 或 $\mu(U)=1$. 这証明了3).

今設 $\mu([\mu])<1$. 因μ是正則的,故有含$[\mu]$的开集U使 $\mu(U)<1$. 这与3)相违而4)得証. 推断5)即由4)而来.

因6)甚显然,故引理証毕.

§3. 支柱在一指定集合中的概率测度集

設X为 Hausdorff 复紧空間而 $B(X)$ 为X上一切 Borel 集所成的 σ-域. 对于 $B(X)$ 上任意正則可数加的有界集合函数 μ, 命 $v(\mu, X)$ 为μ在X上的全变量,定义如

$$v(\mu, X)=\sup\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)|,$$

这里的上确界 sup 展开于 $B(X)$ 中一切有限个互不相交集 $E_1,\cdots,E_n$ 之上. 在范数 $\|\mu\|=v(\mu, X)$之下, $B(X)$ 上一切正則可数加有界集合函数μ所成的綫性空間自然形成一 Banach 空間記作 $R(X)$. 記X上一切有界連續函数 f 所成 Banach 空間为 $C(X)$,其范数为 $\|f\|=\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$. 于是由 Riesz 表示定理, $R(X)$ 与 $C(X)$ 的共軛空間 $C^*(X)$在对应 $\mu\longleftrightarrow x^*$ 下同构,这里

$$x^*(f)=\int_X f(x)\,\mu(dx).$$

最后一式亦将簡記为 $\mu(f)$ 或 $f(\mu)$. 命 $R^w(X)$ 为与 $R(X)$ 同一集合但在 $C(X)$ 拓扑下的拓扑空間,其基由以下集合所构成:

$$N(\mu; A, \varepsilon) = \{\nu / |f(\mu) - f(\nu)| < \varepsilon, f \in A\},$$

这里 $\mu \in R(X)$, $A \subset C(X)$ 有限，而 $\varepsilon > 0$ 都任意．我們知道 $R^{\omega}(X)$ 是一个局部凸的 Hausdorff 綫性拓扑空間(参閱例如 [2] V. 3)．

下述断言，虽很簡单，但在本文中經常用到，故仍明确表达如下．

$R^{\omega}(X)$ 中任一子集 C，設其对 Banach 空間 $R(X)$ 的綫性构造而言是凸的，則必可縮成一点，且对 $R^{\omega}(X)$ 的拓扑构造而言，这个收縮是連續的．

証之如下：設 C 为 $R(X)$ 中的子凸集而 μ_0 为 C 的一个定点．对任意 $\mu \in C$ 与 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 命 $\mu_t = t\mu + (1-t)\mu_0 \in C$，这里 $\mu_1 = \mu$．定义 $C \times [0, 1]$ 到 C 的一个映象 h 为 $h(\mu, t) = \mu_t$, $\mu \in C$, $t \in [0, 1]$．置 $h_t: C \to C$ 为 $h_t(\mu) = h(\mu, t)$，于是 h_t 将 C 收縮成点 μ_0．为証收縮在 $R^{\omega}(X)$ 的拓扑下連續，即 h 对 μ, t 連續，試考察一固定的 (μ, t) 与 μ_t 在 $R^{\omega}(X)$ 中的一个邻域 $N = N(\mu_t; A, \varepsilon) = \{\nu / |f(\nu) - f(\mu_t)| < \varepsilon, f \in A\}$．命 $M > 0$ 为 f 取有限集 A 中一切函数时，較 $|f(\mu) - f(\mu_0)|$ 的最大值为大的一个数，試考察 (μ, t) 在 $R^{\omega}(X) \times [0, 1]$ 中的一个邻域 U 如下：

$$U = N' \times J, \quad N' = N\left(\mu; A, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{\nu / |f(\nu) - f(\mu)| < \frac{\varepsilon}{2}, f \in A\right\},$$

$$J = \left\{t' / |t' - t| < \frac{\varepsilon}{2M}, t' \in [0, 1]\right\}.$$

对任意 $(\nu, t') \in U$，即有

$$f(\nu_{t'}) - f(\mu_t) = t' f(\nu) + (1-t') f(\mu_0) - t f(\mu) - (1-t) f(\mu_0) =$$
$$= (t'-t)[f(\mu) - f(\mu_0)] + t'[f(\nu) - f(\mu)].$$

因之

$$|f(\nu_{t'}) - f(\mu_t)| \leqslant |t'-t| \cdot |f(\mu) - f(\mu_0)| + t'|f(\nu) - f(\mu)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

而 $\nu_{t'} = h(\nu, t') \in N$．这証明了 h 在 (μ, t) 連續，因而收縮 h 在 $R^{\omega}(X)$ 的拓扑下連續．

試考察 X 中的一个子集 F，并以 $m(F)$ 表 $B(X)$ 上支柱 $[\mu] \subset F$ 的一切正則概率測度 μ 所成的集合．我們将賦与 $m(F)$ 以拓扑，使之如拓扑空間 $R^{\omega}(X)$ 的子空間．

下述引理由定义与上述断言甚显然．

引理 1. (i) 对 X 的任意子集 F，集合 $m(F)$ 是一凸集(对 $R(X)$ 的綫性构造而言)，因而可連續地縮成一点(对 $R^{\omega}(X)$ 的拓扑而言)．

(ii) 对 X 的任两子集 F_1, F_2 有

$$m(F_1 \cap F_2) = m(F_1) \cap m(F_2).$$

引理 2. 若 F 是 X 的閉集，則 $m(F)$ 是 $m(X)$ 的閉集．

証．对任意 $x \overline{\in} F$，試取含 x 的开集 U_x, V_x，使

$$x \in U_x \subset \overline{U}_x \subset V_x \subset X - F.$$

依 Urysohu 引理有 X 上的連續函数，或 $f \in C(X)$，使 f 在 $X - V_x$ 上 $= 0$，在 $\overline{U}_x$ 上 $= 1$，而在 X 上 $0 \leqslant f \leqslant 1$．

今考察任意 $\mu \in \overline{m(F)} \cap m(X)$，这里記号 $\overline{\quad}$ 指对拓扑空間 $R^{\omega}(X)$ 而言的閉包．对任意 $\varepsilon > 0$，命 $N(\mu; f, \varepsilon)$ 为 $R^{\omega}(X)$ 中 μ 的下述邻域：

$$N(\mu; f, \varepsilon) = \{\nu / |f(\mu) - f(\nu)| < \varepsilon\}.$$

于是有一 $\nu \in m(F) \cap N(\mu; f, \varepsilon)$, 使 $|f(\mu) - f(\nu)| < \varepsilon$. 但

$$f(\nu) = \nu(f) = \int_X f(x)\,\nu(dx) \leqslant \nu(V_x) = 0.$$

因之 $f(\nu) = 0$ 而

$$\mu(U_x) = \int_{U_x} f(x)\,\mu(dx) \leqslant \int_X f(x)\mu(dx) = \mu(f) = f(\mu) < \varepsilon.$$

因 $\varepsilon > 0$ 是任意的,故有 $\mu(U_x) = 0$, 而 $x \bar{\in} [\mu]$. 因 $x \bar{\in} F$ 是任意的,故有 $[\mu] \subset F$ 或 $\mu \in m(F)$. 这証明了 $m(F)$ 是 $m(X)$ 的閉集而得本引理.

引理 3. $m(X)$ 是 $R^{\omega}(X)$ 的閉集.

証. 設 $\mu \in \overline{m(X)}$, 这里記号 $\overline{}$ 指拓扑空間 $R^{\omega}(X)$ 中的閉包. 于是引理相当于証 μ 是 $B(X)$ 上的一个正則概率測度,或証明以下二点已足: (i) $\mu(E) \geqslant 0$, 此处 $E \in B(X)$ 任意; (ii) $\mu(X) = 1$.

为証 (i),試先設其反面 $\mu(E) < 0$, 这里 E 是 $B(X)$ 中的某一閉集. 因 μ 是正則的,故有一开集 $U \supset E$, 使

$$v(\mu, U - E) < \frac{1}{2}|\mu(E)|$$

(参閱例如 [2] Ⅲ 5.11 与 Ⅲ 1.5). 依 Urysohu 引理有一 $f \in C(X)$, 使在 E 上 $f = 1$, 在 $X - U$ 上 $f = 0$, 而在 X 上 $0 \leqslant f \leqslant 1$. 于是有

$$\begin{aligned} f(\mu) = \int_X f\mu(dx) &= \int_E \mu(dx) + \int_{U-E} f\mu(dx) \leqslant \\ &\leqslant \mu(E) + \int_{U-E} |f|\, v(\mu, dx) \leqslant \\ &\leqslant \mu(E) + v(\mu, U - E) < \\ &< -\frac{1}{2}|\mu(E)| < 0. \end{aligned}$$

試取 $R^{\omega}(X)$ 中 μ 的一个邻域 N 如下:

$$N = N(\mu; f, \varepsilon) = \{\nu / |f(\mu) - f(\nu)| < \varepsilon\},$$

这里 $0 < \varepsilon < |f(\mu)|$. 因 $\mu \in \overline{m(X)}$, 故有 $\nu \in m(X) \cap N$. 于是

$$\begin{aligned} \nu(E) = \int_E f\nu(dx) \leqslant \int_X f\nu(dx) = f(\nu) < \\ < f(\mu) + \varepsilon < 0, \end{aligned}$$

但这与 $\nu \in m(X)$ 相違,因之与 $\nu(E) \geqslant 0$ 相違.

由此知对 $B(X)$ 中任意閉集 E 有 $\mu(E) \geqslant 0$. 設 $E \in B(X)$ 非閉集而 $\mu(E) < 0$. 因 μ 正則,故依 [2] Ⅲ 5.11 有一开集 $U \supset E$ 与一閉集 $W \subset E$, 使 $|\mu(C)| < \frac{1}{2}|\mu(E)|$, 这里 $C \in B(X)$ 任意,只須 $C \subset U - W$. 特別有 $|\mu(E - W)| < \frac{1}{2}|\mu(E)|$, 因而 $\mu(W) = \mu(E) - \mu(E - W) < 0$. 但因 W 是閉的,前已知其不可能. 于是 (i) 得証.

为証明 (ii) 試設其反 $\mu(X) \neq 1$. 試取 $\varepsilon > 0$ 且 $< |1 - \mu(X)|$. 試考察 X 上函数 $f \equiv 1$ 与 μ 的下述邻域 N:

$$N = N(\mu; f, \varepsilon) = \{\nu / |f(\mu) - f(\nu)| < \varepsilon\}.$$

于是有一 $\nu \in m(X) \cap N$，使

$$\nu(X) = f(\nu) < f(\mu) + \varepsilon = \mu(X) + \varepsilon < 1, \quad \text{在 } \mu(X) < 1 \text{ 时},$$

而

$$\nu(X) = f(\nu) > f(\mu) - \varepsilon = \mu(X) - \varepsilon > 1, \quad \text{在 } \mu(X) > 1 \text{ 时},$$

不論何时都与 $\nu \in m(X)$, $\nu(X) = 1$ 相违．这証明了 (ii)．

至此引理証毕．

命 W 为拓扑空間 $R(X)$ 中的閉单位球体：

$$W = \{\mu / \|\mu\| = \nu(\mu, X) \leqslant 1, \mu \in R(X)\}.$$

根据 Aloaglu 的一个定理(参閱例如 [2] V 4.2)，視 W 为拓扑空間 $R^{\omega}(X)$ 的一个子集时，W 是一复紧集． 因 $m(X) \subset W$，而 $m(X)$ 是 $R^{\omega}(X)$ 的閉集(引理 3)，故 $m(X)$ 也是 $R^{\omega}(X)$ 的复紧子集．因对任意 X 的閉集 F，$m(F)$ 是 $m(X)$ 的閉集，故又有下面的

定理． 对 X 的任意閉集 F，集 $m(F)$ 是拓扑空間 $R^{\omega}(X)$ 中的复紧閉集．

§ 4. 支柱从屬于复盖的概率測度集

設 X 为 Hausdorff 复紧空間，而 $B(X)$ 为 X 中一切 Borel 集所成 σ-域如前． 对 X 的任意子集 F 在 § 3 中巳定义 $m(F)$ 为 $B(X)$ 上使支柱 $[\mu] \subset F$ 的一切正則概率测度 μ 所成的集合，并視之为拓扑空間 $R^{\omega}(X)$ 的子空間． 今考 X 的一个有限閉复盖 $\mathscr{F} = \{F_1, \cdots, F_r\}$，由閉集 F_i, $1 \leqslant i \leqslant r$，所构成． 定义 $m(\mathscr{F})$ 为 $B(X)$ 上支柱至少全含于諸閉集 F_i, $1 \leqslant i \leqslant r$，中之一的一切正則概率測度的集合，即

$$m(\mathscr{F}) = \sum_{i=1}^{r} m(F_i),$$

并仍視之为 $R^{\omega}(X)$ 的一个子空間．

定理． 对于 X 的有限閉复盖 $\mathscr{F} = \{F_1, \cdots, F_r\}$，空間 $R^{\omega}(X)$ 的子空間 $m(\mathscr{F})$ 具有以下諸性質：

(i) $m(\mathscr{F})$ 是 $R^{\omega}(X)$ 的閉集．

(ii) $m(\mathscr{F})$ 是 $R^{\omega}(X)$ 的复紧集．

(iii) $\{m(F_1), \cdots, m(F_r)\}$ 是空間 $m(\mathscr{F})$ 在 Leray 意义下的一个閉凸型复盖[4]．

(iv) 若复盖 $\mathscr{F}$ 的神經复合形 $K(\mathscr{F})$ 是連通的，則 $m(\mathscr{F})$ 是 Leray 意义下的凸型空間[4]．

証． 性質 (i), (ii) 直接得自 § 3 中的引理 2, 3 与定理． 为証 (iii) 与 (iv)；試先重述 Leray 的若干定义如下．

按 Leray, Hausdorff 复紧空間的一个复盖称为是凸型的，如果它滿足以下性質：

(a) 复盖中的每一集合是閉的且是"簡单"的，后者意指具有与一个点相同的 Čech-Alexander 上同調結构．

(b) 复盖中任意有限多个集合的交或則是空的，或則是簡单的．

又依 Leray，一个空間是凸型空間，如果它是 Hausdorff 复紧的連通空間，且具有一个凸型复盖，除滿足以上 (a) 与 (b) 外并滿足下述性質 (c)：

(c) 对空間的任一点 x 与 x 的任一邻域 V，在复盖中必有一集合 U 包含于 V 而含 x 为其內点．

由此定义与§3的引理1即得推断(iii). 为証明(iv),先注意 $m(\mathscr{F})$ 是 Hausdorff 复紧空間,且因 $K(\mathscr{F})$ 連通而 $m(\mathscr{F})$ 也是連通的. 今考察任意 $\mu\in m(\mathscr{F})$. 設 $F_{i_1}, \cdots, F_{i_k}$ 为复盖中包含 μ 的支柱 $[\mu]$ 的集合全体. 因每一 $m(F_i)$ 都是 $R^\omega(X)$ 的閉集,故在 $R^\omega(X)$ 中有 μ 的邻域与所有 $i\neq i_1, \cdots, i_k$ 的 $m(F_i)$ 不相遇. 因 $R^\omega(X)$ 已知是局部凸的,故在这些邻域中必然有凸的存在. 命 $\mathfrak{U}(\mu)$ 为 $R^\omega(X)$ 中与一切 $m(F_i)$, $i\neq i_1, \cdots, i_k$, 不相遇的閉凸邻域的全体. 又命 $U(\mu)$ 为 $m(\mathscr{F})$ 中由 $\mathfrak{U}(\mu)$ 中集合与 $m(\mathscr{F})$ 的交所构成一切子集的全体. 于是对于一切 $\mu\in m(\mathscr{F})$, 所有 $U(\mu)$ 中集合的全体 U 构成空間 $m(\mathscr{F})$ 的一个閉复盖具有使 $m(\mathscr{F})$ 成为凸型空間的性質(a),(b)与(c). (c)的成立是由于 $U(\mu)$ 构成 μ 在 $m(\mathscr{F})$ 中的一个邻域系統,(a)是因为 U 中每一集合 V 都是閉凸因而也是簡单的,而(b)是因为任意有限多个閉凸集的交,必然也是閉且凸的,因而如果不是空的,就是簡单的.

§5. 前述諸概念的推广

設 X 与 $B(X)$ 如前. 命 c 为任意定数. 对 X 的任意集合 $F\in B(X)$ 将以 $m_c(F)$ 表 $B(X)$ 上使 $\mu(F)\geqslant c$ 的所有正則概率測度 μ 所成的集合. 在 $c>1$ 时, $m_c(F)$ 显为空集. 在 $c=1$ 时, $m_1(F)$ 即为§3中的集合 $m(F)$. 在 $c\leqslant 0$ 时, $m_c(F)$ 与 $m(X)$ 相同. 在一般情形, $m_c(F)$ 可解說为 $B(X)$ 上使 $\mu([\mu]\cap F)\geqslant c$ 的一切正則概率測度所成的集合.

引理1. 集合 $m_c(F)$ 具有以下諸性質:

(i) 在 $c\leqslant 1$ 时, $m_c(X)$ 与 $m(X)$ 相同,因而是空間 $R^\omega(X)$ 中閉复紧集.

(ii) 在 $d<c\leqslant 1$ 时, $m(F)\subset m_c(F)\subset m_d(F)\subset m(X)$.

(iii) 在 $c\leqslant 1$ 时, $m_c(F)$ 对 $R(X)$ 的綫性构造而言是凸的,且在 $R^\omega(X)$ 的拓扑下可連續地縮成一点.

(iv) 对任意 c_1, c_2, F_1, F_2 有

$$m_{c_1}(F_1)\cap m_{c_2}(F_2)\subset m_{c_1+c_2-1}(F_1\cap F_2).$$

証. 由定义直接得出(参閱§3).

引理2. (i) $m_c(F)$ 在空間 $R^\omega(X)$ 中的閉包 $\overline{m_c(F)}$ 为包含于 $m(X)$ 中 $R^\omega(X)$ 的一个复紧集.

(ii) 若 F 是 X 的閉集,則 $m_c(F)$ 是空間 $R^\omega(X)$ 中的閉复紧集.

証. 因 $m_c(F)\subset m(X)$ 且由§3中引理3与定理 $m(X)$ 是 $R^\omega(X)$ 中的閉复紧集,故 $\overline{m_c(F)}\subset m(X)$ 且是 $R^\omega(X)$ 中的复紧集. 这証明了(i). 为証明(ii)設 $0<c<1$, F 是 X 的閉集而 $\nu\in\overline{m_c(F)}$. 于是由(i), ν 是一正則概率測度. 若 $\nu\bar{\in} m_c(F)$,則有 $\nu(F)<c<1$, 因而 $[\nu]\not\subset F$, 且 $\nu([\nu]-F)>1-c>0$. 因 ν 正則,故有閉集 $C\subset[\nu]-F$ 使

$$\nu([\nu]-F-C)<\nu([\nu]-F)-1+c.$$

于是有

$$\nu(C)>1-c>0.$$

因 C 与 F 都是閉集且不相遇,故有 X 上的連續函数 f 使在 C 上 $f=1$, 在 F 上 $f=0$,而在 X 上 $0\leqslant f\leqslant 1$. 疊 $\varepsilon=\nu(C)-1+c>0$ 并考 ν 在 $R^\omega(X)$ 中的下述邻域:

$$N=N(\nu; f, \varepsilon)=\{\mu/|f(\mu)-f(\nu)|<\varepsilon\}.$$

因 $\nu\in\overline{m_c(F)}$，故有 $\mu\in m_c(F)\cap N$. 对此 μ 有

$$\mu(X-F)\geqslant\int_X f(x)\,\mu(dx)=f(\mu)>$$
$$>f(\nu)-\varepsilon=\int_X f(x)\,\nu(dx)-\varepsilon\geqslant$$
$$\geqslant\int_C f(x)\,\nu(dx)-\varepsilon=\nu(C)-\varepsilon=$$
$$=1-c.$$

于是 $\mu(F)<c$，而 $\mu\overline{\in}m_c(F)$ 与 μ 的选取相违. 这証明了 (ii) 在 $0<c<1$ 时成立. 在 $c\geqslant1$ 或 $c\leqslant0$ 的情形则甚显然.

今考察 X 的一个閉复盖 $\mathscr{F}=\{F_1,\cdots,F_r\}$ 与一組数 $c=\{c_1,\cdots,c_r\}$. 我們将置

$$m_c(\mathscr{F})=\sum_{i=1}^{r}m_{c_i}(F_i),$$

并視之为空間 $R^\omega(X)$ 的子空間.

定理. 設对每一 $i=1,\cdots,r$，数 $c_i\geqslant0$ 且 $\leqslant1$. 則 $R^\omega(X)$ 的子空間 $m_c(\mathscr{F})$ 具有以下諸性質：

(i) $m_c(\mathscr{F})$ 是 $R^\omega(X)$ 的閉集.

(ii) $m_c(\mathscr{F})$ 是 $R^\omega(X)$ 的复紧集.

(iii) $C_c(\mathscr{F})=\{m_{c_1}(F_1),\cdots,m_{c_r}(F_r)\}$ 是 $m_c(\mathscr{F})$ 在 Leray 意义下的一个閉凸型复盖.

(iv) 若 $m_c(\mathscr{F})$ 由集合 $m_{c_i}(F_i)$，$1\leqslant i\leqslant r$，所构成的复盖 $C_c(\mathscr{F})$ 的神經复合形 $K_c(\mathscr{F})$ 是連通的，則 $m_c(\mathscr{F})$ 是 Leray 意义下的凸型空間.

(v) 若对从 1 至 r 取出的任一組指数 $i_1,\cdots,i_s$ 有

$$c_{i_1}+\cdots+c_{i_s}>s-1$$

$\left(\text{特别在 } c_i>1-\dfrac{1}{r},\ 1\leqslant i\leqslant r \text{ 时}\right)$，則 $m_c(\mathscr{F})$ 的复盖 $C_c(\mathscr{F})$ 的神經复合形 $K_c(\mathscr{F})$ 与 X 的复盖 $\mathscr{F}$ 的神經复合形 $N(\mathscr{F})$ 同构.

証. 关于(i)—(iv)証明与 § 4 的引理相仿. 为証明(v)，試先注意在对应 $F_i\longleftrightarrow m_{c_i}(F_i)$，$1\leqslant i\leqslant r$，下 $N(\mathscr{F})$ 可視为 $K_c(\mathscr{F})$ 的一个子复合形. 試考察任意一組指数 $i_1,\cdots,i_s$，对此有

$$F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_s}=\phi,$$
$$F_{i_1}\cap\cdots\cap\hat{F}_{i_j}\cap\cdots\cap F_{i_s}\neq\phi,\quad 1\leqslant j\leqslant s.$$

这里記号 $\hat{F}_{i_j}$ 指集合 F_{i_j} 不估計在相应的交以內. 假設

$$m_{c_{i_1}}(F_{i_1})\cap\cdots\cap m_{c_{i_s}}(F_{i_s})\neq\phi,$$

而 μ 在此交集中，則由引理 1 (iv) 有

$$\mu\in m_{c_{i_1}}(F_{i_1})\cap\cdots\cap\hat{m}_{c_{i_j}}(F_{i_j})\cap\cdots\cap\hat{m}_{c_{i_s}}(F_{i_s})$$
$$\subset m_d(F_{i_1}\cap\cdots\cap\hat{F}_{i_j}\cap\cdots\cap F_{i_s}),$$

此处

$$d=c_{i_1}+\cdots+c_{i_s}-c_{i_j}-s+2.$$

由此得

$$\mu([\mu]\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap\hat{F}_{i_j}\cap\cdots\cap F_{i_s})\geqslant c_{i_1}+\cdots+c_{i_s}-c_{i_j}-s+2.$$

因諸集合 $F_{i_1}\cap\cdots\cap\hat{F}_{i_j}\cap\cdots\cap F_{i_s}$ 互不相遇，故有

$$1=\mu([\mu])\geqslant\sum_{j=1}^{s}\mu([\mu]\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap\hat{F}_{i_j}\cap\cdots\cap F_{i_s})\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^{s}(c_{i_1}+\cdots+c_{i_s}-c_{i_j}-s+2)=$$

$$=(s-1)(c_{i_1}+\cdots+c_{i_s})-s(s-2).$$

由此得 $c_{i_1}+\cdots+c_{i_s}\leqslant s-1$ 与假設相违．这証明了 $K_c(\mathscr{F})$ 与 $N(\mathscr{F})$ 同构．

§6. 多值映象的一致閉性

設 T 是 Hausdorff 复緊空間 X 到 Hausdorff 复緊空間 Y 的一个多值映象．积空間 $X\times Y$ 中由一切使 $y\in T(x)$ 的 (x, y) 所成的子集称为 T 的图形，并将以 $G(T)$ 表之．如果 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 的閉集，則 T 称为閉的．閉映象 T 将称为一致閉的，如果对任意 $(x, y)\in G(T)$ 与 y 在 Y 中的任意邻域 V 有一 x 在 X 中的邻域 U 使对任意 $x'\in U$，集合 $T(x')\cap V$ 非空．

引理． 設 Hausdorff 复緊空間 X 到 Hausdorff 复緊空間 Y 的多值映象 T 是閉的也是一致閉的，則对任意 $X\times Y$ 上的連續函数 f，由

$$T_f(x)=\{y/y\in T(x), f(x, y)=\sup_{\bar{y}\in T(x)}f(x,\bar{y})\}\subset T(x)$$

所定义的 X 到 Y 中的映象 T_f 是一个閉映象．

証． 置 $\sup\limits_{\bar{y}\in T(x)}f(x,\bar{y})=m_x$, $x\in X$．設 $(x, y)\in\overline{G(T_f)}$ 而 $y_0\in T_f(x)$ 使 $f(x, y_0)=m_x$．因 $G(T)$ 是閉的，故 $(x, y)\in G(T)$．若 $(x, y)\,\bar{\in}\,G(T_f)$，則 $f(x, y)<m_x$．置 $\varepsilon=m_x-f(x, y)>0$，而設 U, V, V_0 各为 x, y, y_0 在 X 与 Y 中的邻域使对任意 $x'\in U$, $y'\in V$, $y_0'\in V_0$ 有

$$|f(x', y')-f(x, y)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

与

$$|f(x', y_0')-f(x, y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因 T 是一致閉的，故有 x 在 X 中的邻域 $W\subset U$ 使对任意 $x'\in W$ 有 $T(x')\cap V\neq\phi$ 与 $T(x')\cap V_0\neq\phi$．因 $(x, y)\in\overline{G(T_f)}$，故有 $(\bar{x}', \bar{y}')\in G(T_f)$ 使 $\bar{x}'\in W$, $\bar{y}'\in V$．对此 $\bar{x}'$ 而言又有一 $\bar{y}_0'\in V_0\cap T(x')$．于是有

$$f(\bar{x}', \bar{y}')=m_{\bar{x}'}\geqslant f(\bar{x}', \bar{y}_0').$$

另一面又有

$$f(\bar{x}', \bar{y}_0')=f(\bar{x}', \bar{y}')+[f(x,y)-f(\bar{x}', \bar{y}')]+$$

$$+[f(x, y_0)-f(x, y)]+[f(\bar{x}', \bar{y}_0')-f(x, y_0)]>$$

$$>f(\bar{x}', \bar{y}')-\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=$$

$$=f(\bar{x}', \bar{y}').$$

与前式相违．因之 $(x, y)\in G(T_f)$ 或 $G(T_f)$ 是 $X\times Y$ 的閉集或即 T_f 是閉的．

§7. 关于多値映象的几个拓扑定理

对于 Hausdorff 复紧空間 X 将以 $H(X)$ 表在有理数域上的 Cěch-Alexander 上同調环. 空間将称为簡单的(或更准确地說对于有理数域的系数域来說是簡单的)，如果它与一个点有相同的上同調环.

在以后将用到下面两个一般的引理.

引理 1 (**Leray**)[4]. 若 Hausdorff 复紧空間 X 有一在 Leray 意义下有限的閉凸型复盖 $\mathscr{F}$，則空間 X 与 $\mathscr{F}$ 的神經复合形 N 有同样的上同調环：$H(X)\approx H(N)$. 特别有 $\chi(X)=\chi(N)$.

引理 2 (**Vietoris-Begle**)[1]. 若 f 是 Hausdorff 复紧空間 X 到 Hausdorff 复紧空間 Y 的一个連續映象 f，使对任意 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是簡单的，則映象 f 引出同构 $f^*: H(Y)\approx H(X)$.

今設 φ,ψ 是 Hausdorff 复紧空間 X 到凸型空間 Y 的两个連續映象，这里对任意 $y\in Y$，$\varphi^{-1}(y)$ 都是簡单的. 因 Y 是凸型的，故上同調环 $H(Y)$ 有一有限基設为 Z_i^p，$0\leqslant p\leqslant N$，$1\leqslant i\leqslant \alpha_p$，$p$ 为相应維数. 由上面的 Vietoris-Begle 定理，$H(X)$ 也有一有限基由 $\varphi^*(Z_i^p)$ 构成，这里 $\varphi^*: H(Y)\rightarrow H(X)$ 是 φ 引出的同构. 由此得

$$\psi^*(Z_i^p)=\sum_j b_{ij}^p\,\varphi^*(Z_j^p).$$

以 S_pB^p 表矩陣 $B^p=(b_{ij}^p)$ 的迹，則数 $\sum_p(-1)^p S_pB^p$ 与基 $\{Z_i^p\}$ 的选择无关而将記之为 $\Lambda(\varphi,\psi)$.

定理 A. 設 φ,ψ 为 Hausdorff 复紧空間 X 到凸型空間 Y 的两个連續映象并設对任意 $y\in Y$，$\varphi^{-1}(y)$ 都是簡单的. 若 $\Lambda(\varphi,\psi)\neq 0$，則 φ,ψ 有一重合点，即有点 $x\in X$ 使 $\varphi(x)=\psi(x)$.

上述定理与 Leray 关于映象的定点定理相仿，其証明将从略. 下一定理則由定义直接得出.

定理 B. 設 φ 是 Hausdorff 复紧空間 X 到 Hausdorff 复紧空間 Y 的一个連續映象，并設对任意 $y\in Y$，$\varphi^{-1}(y)$ 都是簡单的. 于是 $\Lambda(\varphi,\varphi)=\chi(Y)$，这里 $\chi(Y)$ 指 Y 的 Euler-Poincaré 示性数.

今設 T 是凸型空間 Y 到自身的一个多値映象，具有以下二性質：

(i) T 是閉的；

(ii) 对任意 $y\in Y$，$T(y)$ 都是簡单的.

今記 T 的图形 $G(T)$ 为 X，并依 $Y\times Y$ 到 Y 的两个投影定义 X 到 Y 的两个映象如下：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(y,y')&=y,\\ \psi(y,y')&=y'\end{aligned}\right\}\quad (y'\in T(y)\ \text{或}\ (y,y')\in X).$$

由 (i)，T 的图形 $X=G(T)$ 是 $Y\times Y$ 的閉集，因之 X 是 Hausdorff 复紧空間. 因对每一 $y\in Y$，$\varphi^{-1}(y)$ 与 $T(y)$ 在 ψ 下同拓而依 (ii) 是簡单的，故数 $\Lambda(\varphi,\psi)$ 有定义. 我們定义

$$\Lambda(T)=\Lambda(\varphi,\psi).$$

定理 C. 設T是凸型空間Y到自身的一个多値閉映象,并設对每一 $y\in Y$, $T(y)$ 都是簡单的. 若数 $\Lambda(T)\neq 0$,則T有一定点,即有一点 $y\in Y$ 使 $y\in T(y)$.

証. 定义 $X=G(T)$ 与映象 $\varphi,\psi: X\to Y$ 如前. 因 $\Lambda(\varphi,\psi)=\Lambda(T)\neq 0$, 故依定理 A, φ,ψ 有重合点 $x=(y,y')\in X$ 使 $\varphi(x)=\psi(x)$, 亦即 $y=y'\in T(y)$. 証毕.

定理 D. 設T是凸型空間Y到自身的恆同映象,則 $\Lambda(T)=\chi(Y)$.

証. 这由定理B直接得出.

定理 E. 設 T_0, T_1 是凸型空間Y到自身的两个多値閉映象,并設

(i) 有一 $\tilde{Y}=Y\times[0,1]$ 到 $\tilde{Y}$ 的多値閉映象 $\tilde{T}$, 使 $\tilde{T}(y,k)=T_k(y)$, 这里 $k=0$, 1, $y\in Y$, 而 $\tilde{T}(Y\times(t))\subset Y\times(t)$, $t\in[0,1]$.

(ii) 定义 $T_t: Y\to Y$ 为 $(T_t(y),t)=\tilde{T}(y,t)$, $t\in[0,1]$, 則对每一 $y\in Y$ 与 $t\in[0,1]$, $T_t(y)$ 都是簡单的. 于是 $\Lambda(T_0)=\Lambda(T_1)$.

証. 命 $\tilde{X}=G(\tilde{T})$, $X_0=G(T_0)$, $X_1=G(T_1)$ 各为 $\tilde{T}$, T_0 与 T_1 的图形. 定义投影 $\tilde{\varphi},\tilde{\psi}:\tilde{X}\to\tilde{Y}$, $\varphi_0,\psi_0: X_0\to Y_0=Y\times(0)$ 与 $\varphi_1,\psi_1: X_1\to Y_1=Y\times(1)$, 如

$$\tilde{\varphi}(\tilde{y},\tilde{y}')=\tilde{y},\quad \tilde{\psi}(\tilde{y},\tilde{y}')=\tilde{y}',\quad \varphi_k(y_k,y_k')=y_k,\quad \psi_k(y_k,y_k')=y_k',$$

这里 $(\tilde{y},\tilde{y}')\in\tilde{X}$, $(y_k,y_k')\in X_k$, $k=0,1$. 記Y到$\tilde{Y}$中 $Y_k=Y\times(k)$ 的自然映入为 λ_k, 即

$$\lambda_k(y)=(y,k),\quad y\in Y,\quad k=0,1.$$

同样記 X_k 到 $\tilde{X}$ 的自然映入为 θ_k, $k=0,1$. 任取 $H(\tilde{Y})$ 的一个基 $\{\tilde{Z}_i^p\}$, 則 $\{\lambda_k^*\tilde{Z}_i^p\}$, $k=0,1$, 都是 $H(Y)$ 的基. 今有

$$\Lambda(\tilde{T})=\Lambda(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})=\sum_p(-1)^p S_p(b_{ij}^p),$$

这里

$$\tilde{\psi}^*(\tilde{Z}_i^p)=\sum_j b_{ij}^p\,\tilde{\varphi}^*(\tilde{Z}_j^p).$$

因 $\tilde{\varphi}\theta_k=\lambda_k\varphi_k$, $\tilde{\psi}\theta_k=\lambda_k\psi_k$, 故应用 θ_k^* 于以上方程的两边得

$$\psi_k^*(\lambda_k^*\tilde{Z}_i^p)=\sum_j b_{ij}^p\,\varphi_k^*(\lambda_k^*\tilde{Z}_j^p),\quad k=0,1.$$

由此得

$$\Lambda(T_k)=\Lambda(\varphi_k,\psi_k)=\sum_p(-1)^p S_p(b_{ij}^p),$$

故 $\Lambda(T_0)=\Lambda(T_1)=\Lambda(\tilde{T})$, 而定理得証.

註. 为簡单起見,我們称滿足上定理中条件的两个映象为**簡单同伦的**.

§8. 对策的定义与主要定理

試考察一 n 人对策,第 i 人的策略空間为 S_i,而贏得函数为 $H_i(x_1,\cdots,x_n)$, $x_i\in S_i$, $i=1,\cdots,n$. 我們将設 S_i 都是 Hausdorff 复紧空間,而 H_i 都是 $S=S_1\times\cdots\times S_n$ 上的連續函数. 对每一 S_i 設 $\mathscr{F}_i=\{F_1^{(i)},\cdots,F_{m_i}^{(i)}\}$ 是它的一个有限閉复蓋, B_i 是 S_i 上一切 Borel 集所成的 σ-域, 而 $\{c_i\}=\{c_{i1},\cdots,c_{im_i}\}$ 是一組 $\geqslant 0$ 且 $\leqslant 1$ 的数. 如 §5 所定义,命 $S_i^*=m_{c_i}(\mathscr{F}_i)$ 为 B_i 上使至少对一指数 j, $1\leqslant j\leqslant m_i$,有 $\mu_i(F_j^{(i)})\geqslant c_{ij}$ 的一切正則概率測度 μ_i 的集合,具有由拓扑空間 $R^\infty(S_i)=R_i^\infty$ 所引出的拓扑.

今对每一 $i=1, \cdots, n$，試考察一 S_i^* 到自身的多值映象 τ_i，具有以下諸性質：

（i）$\mu_i \in \tau_i(\mu_i)$，$\mu_i \in S_i^*$.

（ii）τ_i 是閉的也是一致閉的.

（iii）对每一 $\mu_i \in S_i^*$，集 $\tau_i(\mu_i)$ 对 Banach 空間 $R_i = R(S_i)$ 而言的綫性构造来說都是凸集.

定义. 系統 $\Gamma = \langle I, \{S_i\}, \{H_i\}, \{\mathscr{F}_i\}, \{c_i\}, \{\tau_i\}\rangle$，其中 $I = \{1, \cdots, n\}$，为对策者集，将称为一个活动受限制的对策. 复蓋 $\mathscr{F}_i$ 中的閉集 $F_j^{(i)}$ 将称第 i 人的活动区域，τ_i 为其改变区域，而 c_{ij} 为其集中度. 考虑对策 $\Gamma^* = \langle I, \{S_i^*\}, \{H_i^*\}, \{\tau_i\}\rangle$，这里对策者集同样是 I，策略空間为 $S_i^* = m_{c_i}(\mathscr{F}_i) = \sum_j m_{c_{ij}}(F_j^{(i)}) \subset R^w(S_i)$，而贏得函数为 $H_i^*(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \int_S H_i(x_1, \cdots, x_n)\,\mu(dx)$，其中 μ 为积空間 $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ 上正則概率測度 $\mu_i \in S_i^*$ 的积測度. 我們将称 Γ^* 为对策 Γ 的自然扩充，并称 $(\mu_1^*, \cdots, \mu_n^*) \in S_1^* \times \cdots \times S_n^*$ 为 Γ 或 Γ^* 的一个平衡局势，如果对任意 $\mu_i \in \tau_i(\mu_i^*)$，有

$$H_i^*(\mu_1^*, \cdots, \mu_i^*, \cdots, \mu_n^*) \geqslant H_i^*(\mu_1^*, \cdots, \mu_i, \cdots, \mu_n^*)$$

$(i = 1, \cdots, n)$. 記空間 $m_{c_i}(\mathscr{F}_i)$ 的复蓋 $\{m_{c_{ij}}(F_{ij})\}$ 的神經复合形为 $K_i = K_{c_i}(\mathscr{F}_i)$，复合形的 Euler-Poincaré 示性数为 χ_i. 則数 $\chi(\Gamma) = \chi_1 \cdots \chi_n$ 将称为对策 Γ 的示性数.

主要定理. 活动受限制的对策 $\Gamma = \langle I, \{S_i\}, \{H_i\}, \{\mathscr{F}_i\}, \{c_i\}, \{\tau_i\}\rangle$ 在所有神經复合形 K_i 都連通且示性数 $\chi(\Gamma) \neq 0$ 时，必有平衡局势.

証. 对任意 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in S^* = S_1^* \times \cdots \times S_n^*$ 命 $\Phi^{(i)}(\mu)$ 为使 $H_i^*(\mu_1, \cdots, \mu_i', \cdots, \mu_n) = \sup_{\nu_i \in \tau_i(\mu_i)} H_i^*(\mu_1, \cdots, \nu_i, \cdots, \mu_n)$，又使 $\mu_i' \in \tau_i(\mu_i) \subset S_i^*$ 的一切 μ_i' 的集合，又命

$$\Phi(\mu) = \Phi^{(1)}(\mu) \times \cdots \times \Phi^{(n)}(\mu) \subset S^*.$$

因 τ_i 是閉的，故 $\Phi(\mu)$ 是非空的. 因 τ_i 又是一致閉的，故由 § 6 的引理，Φ 是閉的. 因 $\tau_i(\mu_i)$ 是凸的，故 $\Phi(\mu)$ 也是凸的（对 Banach 空間 $R = R(S_1) \times \cdots \times R(S_n)$ 的綫性构造而言）. 而且，因为 $\tau_i(\mu_i)$ 是凸的且含有 μ_i，故 Φ"簡单地同伦"于 S^* 到 S^* 的恆同映象 J. 由此从 § 7 的定理 E, D 得

$$\Lambda(\Phi) = \Lambda(J) = \chi(S^*) = \prod_{i=1}^{n} \chi(S_i^*),$$

又由 § 7 的引理 1 与 § 5 的定理有

$$\chi(S_i^*) = \chi(K_i) = \chi_i.$$

因之

$$\Lambda(\Phi) = \chi_1 \cdots \chi_n = \chi(\Gamma) \neq 0.$$

由 § 7 的定理 C，应有一点 $\mu^* \in S^*$ 使 $\mu^* \in \Phi(\mu^*)$. 这一点 μ^* 即为对策的一个平衡局势而定理得証.

推論 1. 若对每一 i 与从 $1, \cdots, m_i$ 取出的指数組 $j_1, \cdots, j_s$ 有 $c_{ij_1} + \cdots + c_{ij_s} > s - 1$，則活动受限制的对策 $\Gamma = \langle I, \{S_i\}, \{H_i\}, \{\mathscr{F}_i\}, \{c_i\}, \{\tau_i\}\rangle$ 恆有平衡局势，只須諸 Euler-Poincaré 数 $\chi(N_i)$ 无一为 0，$i = 1, \cdots, n$，这里 N_i 为复蓋 $\mathscr{F}_i$ 的神經复合形，假定是連通的.

証. 由 § 5 的定理中 (v)

$$\chi(N_i) = \chi_i = \chi(K_{c_i}(\mathscr{F}_i)).$$

由此得本推論.

推論 2. 若每一 $\mathscr{F}_i$ 仅由一个集合即 S_i 自身所构成，则活动受限制对策 $\Gamma = \langle I, \{S_i\}, \{H_i\}, \{\mathscr{F}_i\}, \{c_i\}, \{\tau_i\}\rangle$ 或簡記为 $\Gamma = \langle I, \{S_i\}, \{H_i\}, \{\tau_i\}\rangle$，必有平衡局势.

証. 蓋在此情形 $K_{c_i}(\mathscr{F}_i)$ 为一个点，因而 $\chi_i = 1 \neq 0$.

推論 3 (Nash-Glicksberg)[3,5]. 設对策 $\Gamma = \langle I, \{S_i\}, \{H_i\}\rangle$ 中的 S_i 都是 Hausdorff 复紧空間而 H_i 都在 $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ 上連續，則 Γ 必有平衡局势.

証. 因对策 Γ 可視为一个活动受限制的对策，其中每一 $\mathscr{F}_i$ 只由一个集合即 S_i 自身所构成，每一 $c_i = 1$，而对每一 $\mu_i \in S_i^*$ 有 $\tau_i(\mu_i) = S_i^*$，$1 \leqslant i \leqslant n$.

結論. 对于空間 S_i 的一个有限閉复蓋 $\mathscr{F}_i = \{F_i^{(j)}\}$，$1 \leqslant j \leqslant m_i$，而言，它的神經复合形 N_i 的 Euler-Poincaré 数 $\chi_i = \chi(N_i)$ 等于

$$\chi_i = \sum_{s=0}^{m_i-1} (-1)^s a_s(\mathscr{F}_i),$$

这里 $a_s(\mathscr{F}_i)$ 表从閉集 $F_i^{(j)}$ 中选出无公共交集的一切 $(s+1)$ 組的个数. 因之 χ_i 是一个由复蓋 $\mathscr{F}_i$ 的諸閉集相互間的关系所确定的数. 故推論 1 的断言是：只須策略的选择充分集中，且諸活动区域的相互关系滿足 $\chi(\Gamma) \neq 0$ 与連通性的数，即能保証平衡局势的存在. 推論 2 則指出，如果策略的选择不受任何限制，則平衡局势必然存在，而与策略空間的构造及策略的改变区域无关. 如果策略的改变也不受任何限制，即得 Nash-Glicksberg 定理(推論3). 另一面，簡单的例子(見 § 9 的例)指出，如果 $\chi(\Gamma) = 0$，那末即使策略空間很簡单以至只含有有限个点，平衡局势也不必存在. 因之，我們的定理說明：

决定一个活动受限制对策的平衡局势存在与否的主要因素，乃是諸活动区域間相互错綜复雜的关系，而非策略空間自身.

§ 9. 例

定义一只有两个人的活动受限制对策 $\Gamma = \langle I, \{S_i\}, \{H_i\}, \{\mathscr{F}_i\}, \{c_i\}, \{\tau_i\}\rangle$ 如下：

設对策者 I 有 4 个 (純正) 策略 a_i，$1 \leqslant i \leqslant 4$，而对策者 II 有 4 个 (純正) 策略 b_j，$1 \leqslant j \leqslant 4$. 贏得函数 H_1 与 H_2 各如下表所示：

H_1	a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	γ	β	α	δ
b_2	β	α	δ	γ
b_3	α	δ	γ	β
b_4	δ	γ	β	α

H_2	a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	β	γ	δ	α
b_2	γ	δ	α	β
b_3	δ	α	β	γ
b_4	α	β	γ	δ

表中的数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 如此选择，使滿足以下諸不等式：

$$\delta < \alpha < \beta < \gamma, \tag{1}$$

$$\alpha < 2\delta, \tag{2}$$

$$\gamma + \delta < 2\alpha, \tag{3}$$

$$\alpha + \gamma < 2\beta. \tag{4}$$

复盖 $\mathscr{F}_i$, $i = 1, 2$, 则各由 4 个閉集 $F_j^{(i)}$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, 所构成，这里

$$F_j' = \{a_j, a_{j+1}\},$$

$$F_j'' = \{b_j, b_{j+1}\}$$

(規約 $a_5 = a_1$, $b_5 = b_1$). 諸数 $\{c_{ij}\}$, $i = 1, 2$, 将取作都与 > 0 又 < 1 的数 c 相等，这里的 c 并将假定充分接近于 1. 于是空間 S_i^*, $i = 1, 2$, 可視为各由点 $\sum_{j=1}^4 x_j a_j$ 与 $\sum_{j=1}^4 y_j b_j$ 所构成，这里的 x, y 各满足以下諸不等式

对 x:

$$x_j \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant 4,$$

$$\sum_{j=1}^4 x_j = 1.$$

又 $x_1 + x_2 \geqslant c$ 或 $x_2 + x_3 \geqslant c$ 或 $x_3 + x_4 \geqslant c$ 或 $x_4 + x_1 \geqslant c$.

对 y:

$$y_j \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant 4,$$

$$\sum_{j=1}^4 y_j = 1.$$

又 $y_1 + y_2 \geqslant c$, 或 $y_2 + y_3 \geqslant c$, 或 $y_3 + y_4 \geqslant c$, 或 $y_4 + y_1 \geqslant c$.

命 a_j', a_j'', b_j', b_j'', $1 \leqslant j \leqslant 4$, 各为由以下諸式所定的点：

$$\begin{aligned}
a_1' &= ca_1 + (1-c)a_3, \\
a_2' &= (2c-1)a_2 + (1-c)a_1 + (1-c)a_3, \\
a_3' &= ca_3 + (1-c)a_1, \\
a_4' &= (2c-1)a_4 + (1-c)a_1 + (1-c)a_3, \\
a_1'' &= (2c-1)a_1 + (1-c)a_2 + (1-c)a_4, \\
a_2'' &= ca_2 + (1-c)a_4, \\
a_3'' &= (2c-1)a_3 + (1-c)a_2 + (1-c)a_4, \\
a_4'' &= ca_4 + (1-c)a_2.
\end{aligned}$$

同样 b_j', b_j'' 亦由类似的等式所定义，只是在以上各式中諸 a 都易为相应的 b. 对策者 I 与 II 的所有混合策略所成的空間于是可視为四面体 T_1 与 T_2, 其頂点各为 a_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$, 与 b_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$. 于是 S_1^* 是 T_1 在四棱 a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_1 周围的某一部分，这一部分的边界系由四个平行四边形 $a_1'a_1''a_2'a_2''$, $a_2'a_2''a_3'a_3''$, $a_3'a_3''a_4'a_4''$, $a_4'a_4''a_1'a_1''$ 与其他 8 个梯形所构成，这些梯形两两在四面体 T_1 的四个面上. 我們将以 C_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$, 表 S_1^* 在 a_j 附近的四个角，对此 C_1 系由以下諸式所定：

$$\begin{cases}
x_1 + x_2 \geqslant c, \quad x_1 + x_4 \geqslant c, \\
x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.
\end{cases}$$

其他諸角 C_j, $j = 2, 3, 4$, 亦类似. 我們又将以 $C_{j,j+1}$, 表由以下諸式所定义的四个柱形：

$$\begin{cases} x_j + x_{j+1} \geqslant c, \quad x_{j-1} + x_j < c, \quad x_{j+1} + x_{j+2} < c, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

这里 $1 \leqslant j \leqslant 4$ 并按规約 $x_{k+4} = x_k$, $C_{4,5} = C_{4,1}$.

现在再定义对于 $\mu \in S_1^*$ 的改变区域 $\tau_1(\mu)$, 使 τ_1 除满足凸、閉与一致閉以及包含 μ 自身的一些要求外,并满足以下諸条件:

(i) $\tau_1(\mu) = C_j$, μ 在綫段 $a_j' a_j''$ 上时, $1 \leqslant j \leqslant 4$.

(ii) $\tau_1(\mu) \supset C_j$, $\mu \in C_j$ 时, $1 \leqslant j \leqslant 4$.

(iii) $\tau_1(\mu) \subset C_{j,j+1} \cup C_j \cup C_{j+1}$, $\mu \in C_{j,j+1}$ 时, $1 \leqslant j \leqslant 4$.

(iv) $\mu \in \operatorname{int} \tau_1(\mu)$, μ 不在任一綫段 $a_j' a_j''$ 上时, $1 \leqslant j \leqslant 4$.

对满足 $u \geqslant 0$, $u' \geqslant 0$, $u'' \geqslant 0$, $u + u' + u'' = 1$ 的数 (u, u', u'') 与满足 $v \geqslant 0$, $v' \geqslant 0$, $v'' \geqslant 0$, $v + v' + v'' = 1$ 的数 (v, v', v''), 命

$$\begin{aligned} \bar{a}_j &= u a_j + u' a_j' + u'' a_j'', \\ \bar{b}_j &= v b_j + v' b_j' + v'' b_j'' \end{aligned} \qquad (1 \leqslant j \leqslant 4)$$

諸值 $H_1(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ 与 $H_2(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$, 将列表如下:

H_1	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$
$\bar{b}_1$	$\bar{\gamma}^1_{11}$	$\bar{\beta}^1_{21}$	$\bar{\alpha}^1_{31}$	$\bar{\delta}^1_{41}$
$\bar{b}_2$	$\bar{\beta}^1_{12}$	$\bar{\alpha}^1_{22}$	$\bar{\delta}^1_{32}$	$\bar{\gamma}^1_{42}$
$\bar{b}_3$	$\bar{\alpha}^1_{13}$	$\bar{\delta}^1_{23}$	$\bar{\gamma}^1_{33}$	$\bar{\beta}^1_{43}$
$\bar{b}_4$	$\bar{\delta}^1_{14}$	$\bar{\gamma}^1_{24}$	$\bar{\beta}^1_{34}$	$\bar{\alpha}^1_{44}$

H_2	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$
$\bar{b}_1$	$\bar{\beta}^2_{11}$	$\bar{\gamma}^2_{21}$	$\bar{\delta}^2_{31}$	$\bar{\alpha}^2_{41}$
$\bar{b}_2$	$\bar{\gamma}^2_{12}$	$\bar{\delta}^2_{22}$	$\bar{\alpha}^2_{32}$	$\bar{\beta}^2_{42}$
$\bar{b}_3$	$\bar{\delta}^2_{13}$	$\bar{\alpha}^2_{23}$	$\bar{\beta}^2_{33}$	$\bar{\gamma}^2_{42}$
$\bar{b}_4$	$\bar{\alpha}^2_{14}$	$\bar{\beta}^2_{24}$	$\bar{\gamma}^2_{34}$	$\bar{\delta}^2_{44}$

对任意按以上所选的数 (u, u', u'') 与 (v, v', v''), 在 $c \to 1$ 时显有 $H_1(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \to H_1(a_i, b_j)$, $H_2(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \to H_2(a_i, b_j)$. 因之我們可取 $c > 0$ 充分接近于 1, 使諸值 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$ 之間的大小关系与不等式 (1)—(4) 所示者相同,例如:

$$\bar{\delta}^k_{i_1, j_1} < \bar{\alpha}^k_{i_2, j_2} < \bar{\beta}^k_{i_3, j_3} < \bar{\gamma}^k_{i_4, j_4}, \tag{$\bar{1}$}$$

$$2\bar{\delta}^k_{i_1, j_1} < \bar{\alpha}^k_{i_2, j_2} \tag{$\bar{2}$}$$

以及 $(\bar{3})$, $(\bar{4})$, $k = 1, 2$, 而 $i_r, j_r = 1, 2, 3, 4$ 任意. 今設 P_1 与 P_2 各为閉多角形 $\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4\bar{a}_1$ 与 $\bar{b}_1\bar{b}_2\bar{b}_3\bar{b}_4\bar{b}_1$. 空間 $P_1 \times P_2$ 在拓扑上是一环面,我們将表示为一正方形,其对边彼此恆同. 假設在 $P_1 \times P_2$ 上有平衡局势 (μ_1^*, μ_2^*), 我們将依照 $u, u', \cdots$ 的値区别几种不同情形来証明这不可能.

情形 I $\qquad u > 0, \quad v > 0.$

由于改变区域的选择,可見在这时对 P_1 上 μ_1^* 的某一邻域中的任一 μ_1, 有

$$H_1(\mu_1^*, \mu_2^*) \geqslant H_1(\mu_1, \mu_2^*), \tag{5}$$

同样对 P_2 上 μ_2^* 的某一邻域中的任一 μ_2, 有

$$H_2(\mu_1^*, \mu_2^*) \geqslant H_2(\mu_1^*, \mu_2). \tag{6}$$

由于 $(\bar{1})$—$(\bar{4})$ 諸不等式,可見为满足不等式 (5) 与 (6), 点 (μ_1^*, μ_2^*) 必須位于图中的粗黑綫上. (图中 $\bar{\alpha}, \cdots, \bar{\delta}$ 各指 $H_1(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ 与 $H_2(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ 的値而为 $\bar{\alpha}^k_{ij}$ 等的簡写). 因这

些粗黑綫互不相交，故这样的平衡局势不能存在.

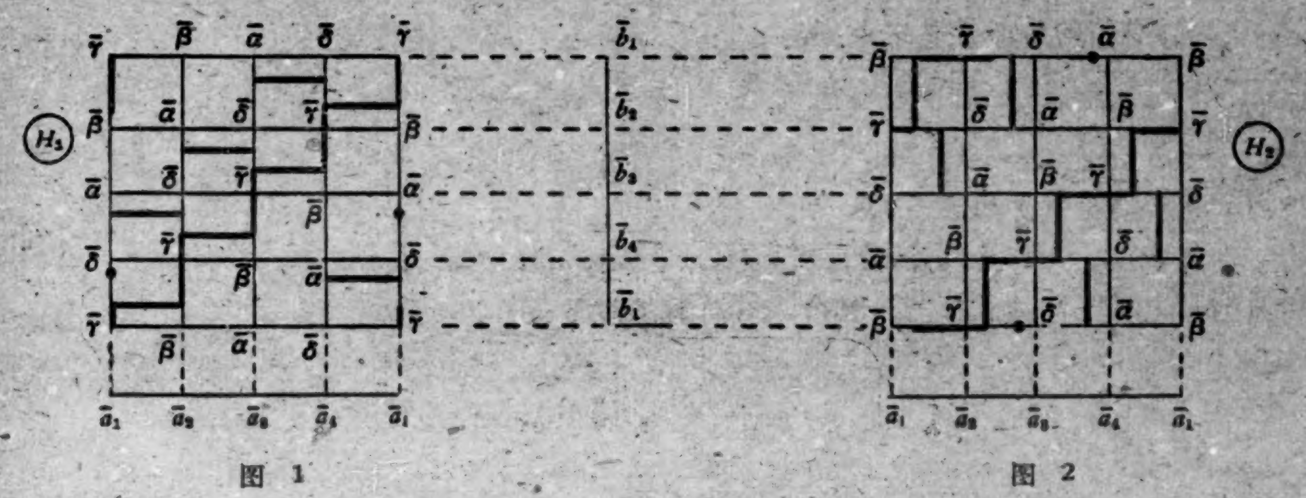


图 1　　　　图 2

情形 Ⅱ　　$u>0,\quad v=0.$

这时 (5) 对于 P_1 上 μ_1^* 的某一邻域中的任意 μ_1 仍应滿足如前. 至于 (6)，則只在 $\mu_2^*\neq\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3$ 或 $\bar{b}_4$，仍应对 P_2 上 μ_2^* 的某一邻域中的任意 μ_2 都滿足. 因之 $P_1\times P_2$ 上的平衡局势如果存在，必須一方面位于图 1 中的粗黑綫上，另一面又須在图 2 中的粗黑綫或水平綫上. 这样的平衡局势只可能是

$$(\bar{a}_1,\bar{b}_1),\ (\bar{a}_2,\bar{b}_4),\ (\bar{a}_3,\bar{b}_3)\ 或\ (\bar{a}_4,\bar{b}_2).$$

但我們有

$$H_2(a_1,b_1)-H_2(a_1,b_1')=(1-c)(\beta-\delta)>0,$$
$$H_2(a_1,b_1)-H_2(a_1,b_1'')=(1-c)(2\beta-\gamma-\alpha)>0,$$
$$H_2(a_2,b_1)-H_2(a_2,b_1')=(1-c)(\gamma-\alpha),$$
$$H_2(a_2,b_1)-H_2(a_2,b_1'')=(1-c)(2\gamma-\beta-\delta),$$
$$H_2(a_3,b_1)-H_2(a_3,b_1')=(1-c)(\delta-\beta),$$
$$H_2(a_3,b_1)-H_2(a_3,b_1'')=(1-c)(2\delta-\alpha-\gamma),$$
$$H_2(a_4,b_1)-H_2(a_4,b_1')=(1-c)(\alpha-\gamma),$$
$$H_2(a_4,b_1)-H_2(a_4,b_1'')=(1-c)(2\alpha-\beta-\delta).$$

由此得 $c\to 1$ 时

$$\frac{1}{1-c}[H_2(\bar{a}_1,b_1)-H_2(\bar{a}_1,\bar{b}_1)]\to v'(\beta-\delta)+v''(2\beta-\gamma-\alpha)>0.$$

因之只須 c 充分接近于 1，即有

$$H_2(\bar{a}_1,b_1)>H_2(\bar{a}_1,\bar{b}_1).$$

因 $b_1\in\tau_2(\bar{b}_1)$，故上一不等式說明 $(\bar{a}_1,\bar{b}_1)$ 不能是平衡局势. 同样 $(\bar{a}_2,\bar{b}_4)$ 等也不能是平衡局势. 故在这一情形中沒有平衡局势.

情形 Ⅲ　　$u=0,\quad v>0.$

在这一情形中在 $P_1\times P_2$ 上的平衡局势应位于图 2 中的粗黑綫上又位于图 1 中粗黑綫或垂直綫上. 唯一的可能性是

$$(\bar{a}_1,\bar{b}_2),\ (\bar{a}_2,\bar{b}_1),\ (\bar{a}_3,\bar{b}_4)\ 或\ (\bar{a}_4,\bar{b}_3).$$

象情形Ⅱ那样，这些都是不可能的.

情形 IV $u=0,\quad v=0.$

如前,唯一的可能性是以下 16 个点:

$$(\bar{a}_i, \bar{b}_j), \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

但点

$$(\bar{a}_1, \bar{b}_1), \quad (\bar{a}_2, \bar{b}_4), \quad (\bar{a}_3, \bar{b}_3), \quad (\bar{a}_4, \bar{b}_2)$$

在情形Ⅱ中巳知其不可能,而点

$$(\bar{a}_1, \bar{b}_2), \quad (\bar{a}_2, \bar{b}_1), \quad (\bar{a}_3, \bar{b}_4), \quad (\bar{a}_4, \bar{b}_3)$$

在情形Ⅲ中又巳知其不可能. 其余需要試驗的点是:

$$(\bar{a}_1, \bar{b}_3), \quad (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \quad (\bar{a}_3, \bar{b}_1), \quad (\bar{a}_4, \bar{b}_4),$$
$$(\bar{a}_1, \bar{b}_4), \quad (\bar{a}_2, \bar{b}_3), \quad (\bar{a}_3, \bar{b}_2), \quad (\bar{a}_4, \bar{b}_1).$$

对于点 $(\bar{a}_1, \bar{b}_3)$ 置

$$b_3^* = cb_3 + (1-c)b_2.$$

于是

$$H_2(a_1, b_3^*) - H_2(a_1, b_3') = (1-c)(\gamma - \beta) > 0,$$
$$H_2(a_1, b_3^*) - H_2(a_1, b_3'') = (1-c)(2\delta - \alpha) > 0$$

等等. 由此得 c 充分接近于 1 时

$$H_2(\bar{a}_1, b_3^*) - H_2(\bar{a}_1, \bar{b}_3) > 0.$$

因 $b_3^* \in \tau_2(\bar{b}_3)$, 故 $(\bar{a}_1, \bar{b}_3)$ 不能是一个平衡局势. 諸点 $(\bar{a}_2, \bar{b}_2)$, $(\bar{a}_3, \bar{b}_1)$ 与 $(\bar{a}_4, \bar{b}_4)$ 也是如此.

对于点 $(\bar{a}_1, \bar{b}_4)$ 置

$$a_1^* = ca_1 + (1-c)a_2.$$

则

$$H_1(a_1^*, b_4) - H_1(a_1', b_4) = (1-c)(\gamma - \beta) > 0,$$
$$H_1(a_1^*, b_4) - H_1(a_1'', b_4) = (1-c)(2\delta - \alpha) > 0$$

等等. 由此得 c 充分接近于 1 时

$$H_1(a_1^*, \bar{b}_4) - H_1(\bar{a}_1, \bar{b}_4) > 0.$$

因 $a_1^* \in \tau_1(\bar{a}_1)$, 故 $(\bar{a}_1, \bar{b}_4)$ 不能是平衡局势. 諸点 $(\bar{a}_2, \bar{b}_3)$, $(\bar{a}_3, \bar{b}_2)$ 与 $(\bar{a}_4, \bar{b}_1)$ 亦然.

綜合上述可見只須 c 充分接近于 1, 我們的活动受限制对策即无平衡局势, 虽然每个对策者只拥有有限个純正策略.

参 考 文 献

[1] E. G. Begle, The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces, *Annals of Math.*, **51** (1950), 534—543.

[2] Dunford-Schwartz, Linear operators, Part I, General theory, New York, 1958.

[3] I. L. Glicksberg, A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 170—174.

[4] J. Leray, Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations, *J. de Math.*, **24** (1945), 95—167.

[5] J. Nash, Non-coorperative games, *Annals of Math.*, **54** (1951), 286—295.

第11卷 第1期　　数学学报　　Vol. 11, No. 1
1961年3月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　March, 1961

数学方法在麦收中的应用[*][**]

華罗庚等

在中共北京市委农村工作部的統一領导下，中国科学院数学研究所、力学研究所、中国科学技术大学、北京师范学院、北京农业机械化学院、北京师专、北京工农师院等七个单位的部分师生，参加了北京市郊的麦收工作．这次工作的着眼点在于試用数学方法来选定运輸力最省的打麦場場址的問題．在工作中也遇到了不少其他可以运用数学方法来处理的問題．本文是由这次工作的技术資料中选摘几段而写成的，着重在方法和結論，証明說得簡单一些，对急待应用而在数学上感覚困难的讀者，不妨将証明略去不讀．

打麦場选址問題一般出現了两个类型，一种是另散小片的麦田合設一个打麦場的問題，也就是首先由曲阜师范学院所处理过的葡萄串型的問題，而另一种是大片麦田的麦場設置問題，我們将介紹这两种类型麦田的处理方法．在处理的过程中也出現了另一类型的极值問題．我們知道，康脫洛諾維奇–西奇柯克类型的运輸問題可以描述成为：有固定的收点，发点和固定的道路，求出最經济的运輸方案；而葡萄串型的麦場选址問題，則可以描述为：有了固定的发点和固定的道路来寻求最好的收点使运輸力为最經济的問題．因而也启发了以下的問題：有了固定的发点，寻求合理的收点，及修筑合理的道路問題．例如有了三个油井，噴油量各为 m_1, m_2, m_3，我們寻一地点建立炼油厂并修筑油管輸油使油管最省的問題，本文中也附带提供了解决这一問題的一个方法．

数学方法的优点是在于它的普遍性及抽象性，但在应用时必須結合具体事物的条件进行必要的修改才眞能解决問題．数学上选出的最优的打麦場不一定就是眞正合适的打麦場，在这次工作中我們发現还必須考虑到五个因素：水、地、土、交、风．“水”是指麦場必須近水源，这对潑場，消防都有利．“地”是指地势，地势低洼所在，一雨被淹的地方要不得．“土”是指土質，沙地建不好麦場．“交”是指交通，粮食归仓，麦稭送工厂等等的运輸問題．“风”是揚場所需，但又須防止大风捲走的可能性．总之，結合实际，在实际允許下的最优方案才是眞正的最优方案．

在工作过程中还遇到了三种其他方面的問題．首先是由于一大二公所产生的公社的全面規划問題．不少公社提出了整个公社的規划問題．其次是劳动組織問題，能不能运用工业上的經驗来組織农业劳动．这两个問題大家做了些极初步的工作，这儿不准备介紹．第三个問題就是估計产量的問題，这次我們发現了以往估計得偏高的原因，并指出避免偏高的方法．

总的講来，由于工作时間短，負責整理的同志知識水平低，內容是极不成熟的，希望同志們指正．

---

* 1961年1月25日收到．

** 本文由华罗庚等执笔整理，曾于1960年7月在全国运筹学山东現場会議上宣讀．

§1. 葡萄串类型麦地的选場法

这問題是曲阜师范学院最先提出的. 他們选場所根据的原則是：支并干，小并大，两头并中間[1]. 所处理的問題是道路无迴环的情况. 在这次工作中我們作了适当的簡化. 以下口訣的第一部分就是处理的道路无迴环的情况：

道路无迴环， 抓各端， 最小的进一站.	道路有迴环， 每圈甩一段， 化为无迴环， 然后照样算；	甩法有不同， 結果一一算， 算后再比較， 最优可立断.

算法. 假定我們有以下的麦地及道路图(图 1)：

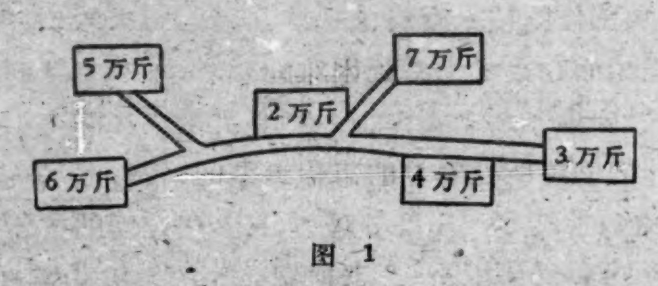


图 1

根据这图我們画一个"操作图"，把一块麦地当作一点(以下仍称为麦地)，把产量作为集中在这一点上，麦地和道路交叉点都称为站. 画一小圈代表站，給以号碼. 站旁注上麦产量，这样便得操作图如图 2：

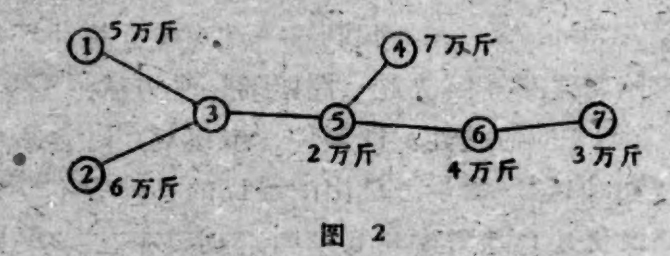


图 2

各端是①，②，④，⑦，其中最小的是⑦，"最小的进一站"把⑦的 3 万斤加在⑥上得图 3：

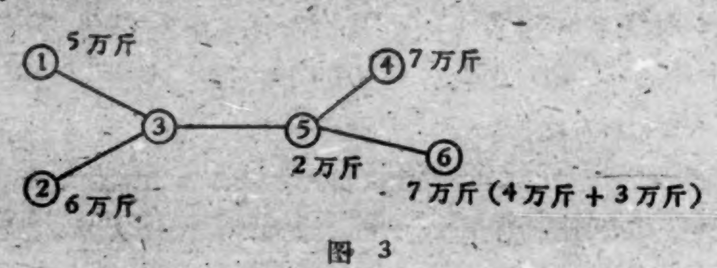


图 3

现在的各端是①，②，④，⑥，而①的产量 5 万最小，①进到③得图 4：

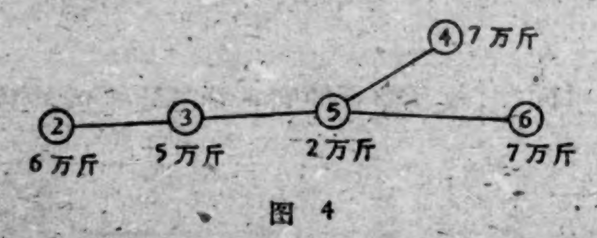


图 4

1) 在全国运筹学山东现場会議期間，我們学习到，曲阜师院的同志們已将他們的原則改进为"大中建麦場，小中往里靠"，并給出这一原則的数学証明. 他們的結果发表在科学大众，1960 年 10 月号.

再續用此法逐步得图 5:

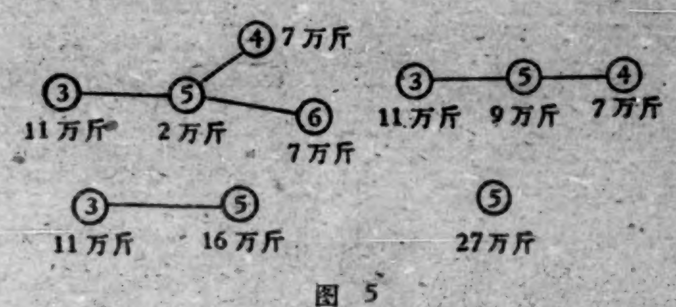


图 5

由此得出結論，打麦場設在⑤处.

这就是第一段口訣的意义.

如果道路图上有圈出現，例如图 6:

图 6

甩②—③間的一段得图 7:

图 7

用上法算出，麦場在④，运輸共需

$$5\times 9+5\times 4=65\text{（万斤里）}.$$

又甩②—④間的一段，由上法算出麦場应在③，运輸共需

$$5\times 9+4\times 7=73\text{（万斤里）}.$$

更甩③—④間的一段，麦場应在②，运輸共需

$$5\times 6+7\times 3+5\times 3=66\text{（万斤里）}.$$

三种运法进行比較，第一种 65 万斤里最少，因此麦場应当設在④，而且用第一种运送方案.

这就是第二、第三段口訣的意义.

証. 从最簡单的情况証起. 如果有两站：

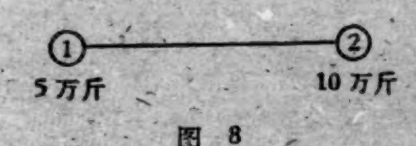


图 8

显然，把①处的 5 万斤运到②处最合适，路中任一点設場都沒有这样好. 这就是曲阜师范学院的“小并大”原則.

对于沒有圈的情况，假定①是各端中产量最小者，并假定②是①的进站，見图 9.

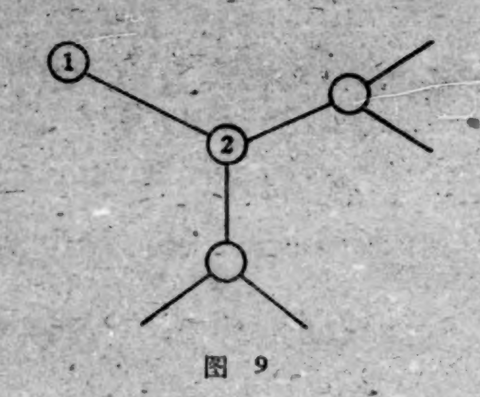


图 9

我們証明，麦場設在①或①，②之間都沒有把麦場設在②好．如果麦場設在①或①，②之間，那么除①以外的各站的麦子都要經过②运到麦場，因此根据上述特例的討論，把場設在②一定比把場設在①或①，②之間要好．这就是說，①和①，②之間不宜建場．这样①的麦子进入麦場一定經过②，因此将①的产量并到②之后选麦場的問題和不并以前完全一样，因此归并后选出的最好麦場也就是沒有归并情况的最好麦場．

这就証明了口訣的第一部分．

如果有圈，那么总可說将麦子从麦地經最短路径运到打麦場，圈上一定有一段路程不运麦子，这就証明了口訣的其余部分．

注．在开始讲的仅有两站的情形，如果两站的产量一样，不难証明，麦場选在連接两站的道路上任一点所費的总运量都相等．这时最小进一站的方法仍然可用，只是要将这两站的任一站看作产量最小即可，至于无圈的一般情况，如果各端中产量最小的不只一站时，也可在这些站里任选一站作为产量最小的，运用“最小进一站”原則进行下去，理由与前同．

在有圈的情形，麦子走最短途径运往打麦場时，如果圈上所有路程都有麦子运过，总可适当改变运輸路綫而不改变运輸量使得圈上有一段路程不运麦子．

变化．在道路上任取一段，如果将我們的图形分为两个部分（这时这一段决不能在圈上），計算一下这两部分的产量，那么按照“最小进一站”的原則可知产量小的一边决不可能設場，因而可以把麦量小的一部分的麦量总和一并进到麦量大的部分中連接麦量小的部分的那一站上，例如图 10：

图 10

①，②之間的道路将图形分成两部分，左边共 50，右边共 47．于是将 47 并入①計算，即得图 11：

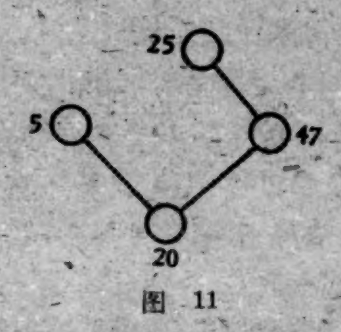


图 11

所以場应設在①这样做可以化簡由"甩一段"而产生的計算.

如何选多个打麦場. 如果有一张沒有环路的麦地操作图,我們要設两个麦場,以使运力最省. 由于沒有环路,所以任意去掉两站間的一段路,图形都被分成两个不相联接的麦地操作图,分别求出每个图形的麦場的位置,这便得到了两个麦場的一个方案.

依次去掉两个相邻站之間的路,算出依于它們的两个麦場的方案,然后再比較这些方案所需的运力,就得到两个麦場的最优位置.

例如有麦地操作图如图 12, 可以把計算过程列成下表:

去掉的路	新麦場	所需运力
① 与 ②	①, ⑥	55 万斤里
② 与 ⑧	①, ⑤	36 万斤里
⑧ 与 ④	⑧, ④	125 万斤里
⑧ 与 ⑤	①, ⑤	33 万斤里

由此可見,两个麦場应該設在①与⑤. 站①,②,③,④的麦子运到①去打場,而⑤的麦子就在⑤打場.

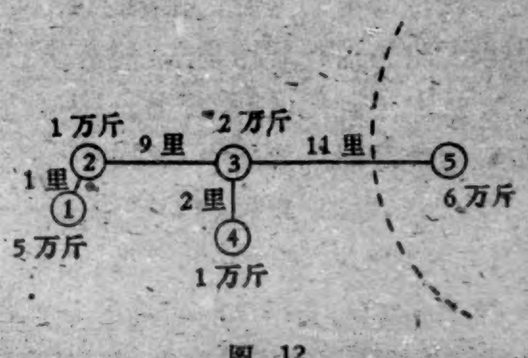


图 12

这一方法的証明如下: 如果在操作图上沒有环路, 則任意两点間,有唯一的一条路把它們联接起来. 若麦場設在点 A 与点 B, 那末距 A 近的站的麦子都运給 A, 距 B 近的站的麦子都运給 B. 如果在連接 A 与 B 的路上有一站,它距 A 与 B 的距离相等,那末这一站及連着这一站的一切支路(除掉連接 A 与 B 的路之外的路)上的站距 A 与 B 都是相等的. 因此就可以把这一站及連着这一站的所有支路上的站的麦子都运給 A 或 B. 这样一来,确定两个場址后,总有一段路可以不运麦,而这一运法又使运力最小. 因此可以用上述的甩掉一段路以分别求出打麦場址的方法来确定两个打麦場.

对于有环路的麦地操作图,可以任意甩掉一段弧, 将图形化为无环路的情況, 算出两个麦場的最优位置,再甩掉另一段弧,算出两个麦場的最优位置, 如此等等. 最后比較一

下它們所需的运力,就可以得到两个麦場的最优位置了.

对于設置 $m(m>2)$ 个麦場的做法也是类似的. 若有一张沒有环路的麦地操作图,任意甩掉 $m-1$ 段相邻两站間的路,就得到 m 个操作图,依次算出它們的麦場,就得到一个方案,对应于不同的甩法,就得到不同的方案. 最后比較一下这些方案所需的运力,就可以得到 m 个麦場的最优位置(証法与 $m=2$ 时相同,就不贅述了). 对于有环路的情形,也可以如上法化为沒有环路的情形来考虑.

又若有了一张沒有环路的麦地操作图,当有了一个旧麦場,而需要添設一个新麦場时,手續可以簡单一些. 任意甩掉相邻两站間的一段路,则图形被分成两张不相联接的图形,含有旧場的图形的場址就設在旧場,再求不含旧場的图形的場址. 将所有这种可能的方案都求出来,再比較一下它們的运力,就得到新場的最优位置了. 更一般地,对于已經有了 l 个場,还要添設 m 个場,也可以仿照上述方法加以处理.

附注. 有时候希望麦場不要过于庞大,因为过于庞大对运輸,操作等等都不經济;在这种情形下那就需要設两个麦場. 另外也可能已經有了一个旧麦場,但还希望增設一个新麦場. 对这些情形首先就对所要設的麦場规定它們的最大容量,当去掉两站間的一段路后,就可以先看一下所分成的两部中的各部分的总产量是否超过麦場的最大容量;如果有一个超过了容量,我們就不必进行上述的考虑.

§2. 大片麦地选場法

随着人民公社的发展,出现了愈来愈多的大片麦地,五六百亩,成千亩的都有,因而在大片麦地中合理設場問題就显得格外重要. 以上所談的方法显然不能滿足客观的要求了,因此,我們必須考虑新办法.

我們将着重地考虑长方形麦地設場的問題,在实际工作中也显示出长方形麦地出现的可能性最大. 假定麦地中小麦生长情况是均匀的,那么我們有以下的結論:

1. 长方形麦地,地中設場,以中心最好.
2. 边上設場以长边中点最好.

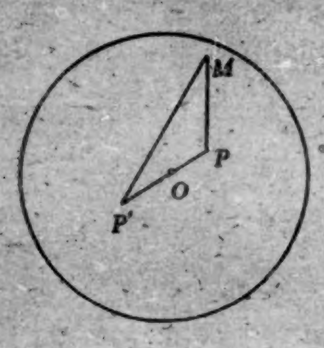


图 13

証. 我們証得更普遍的結論.

1) 任何有对称中心的麦地,在中心設場最好(图 13).

所謂有对称中心 O 的麦地乃是指在 P 点有一撮麦,则在其对称点 P' 也有等量的一撮麦,而 P' 是 P 的对称点,如果 O 在 PP' 連綫上而且是 PP' 的中分点.

显然,把 P, P' 两处的麦运往任一点 M 的运距大于 P, P' 运往 O 点的运距(三角形两边之和大于第三边).

2) 有对称軸的图形,麦場应当設在軸上(图 14).

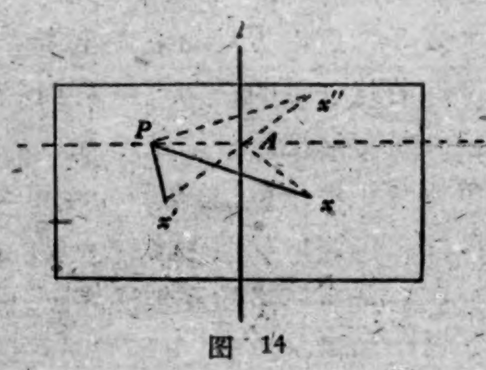


图 14

假定 l 是对称軸,在 x 处有麦,則其关于 l 的对称点 x' 处也有麦. 命 P 为任一不在 l 上的点. 过 P 作 l 的垂綫交 l 于 A. 我們証明 $Px+Px'>Ax+Ax'$. 以 PA 为对称軸,作三角形 PxA 的对称形 $Px''A$,则 x', A, x'' 三点在一直綫上. 因此 $Px''+Px'>x'x''$,

即得 $Px + Px' > x'A + Ax'' = x'A + Ax$. 証毕.

3) 由 2) 已知如果矩形的边上筑場, 它一定以边的中心为最好. 我們再証长边的中心最好.

把同样的两块依长短边的中心选好如图 15. 把非公共的部分各分为四块, 标上字样, 注意方向. 可以証明, 同"字"矩形中同位的点离 O 的距离横的比竪的近. 实际上, 設长方形边长各为 $2a$ 及 $2b(b > a)$.

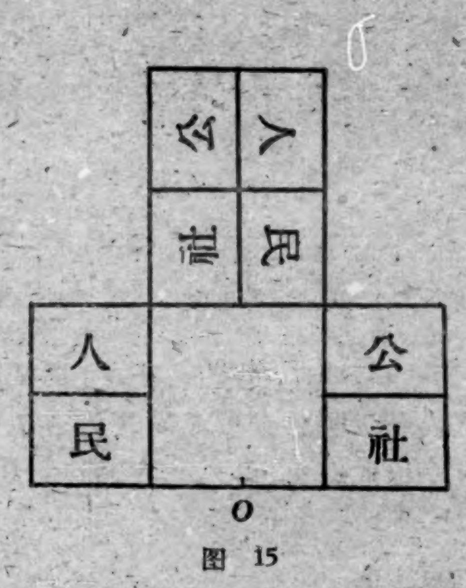


图 15

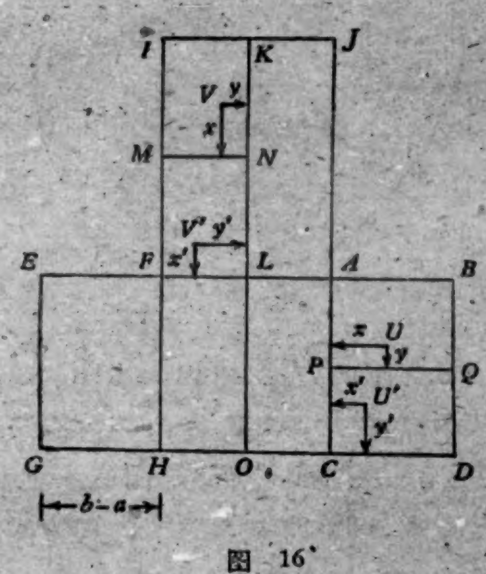


图 16

在图 16 中, 命 M, N, P, Q 各为边 IF, KL, AC, BD 的中点, 因此矩形 $IKMN$, $MNFL$, $ABPQ$ 及 $PQCD$ 都是边长为 $b-a$ 及 a 的矩形.

将 B 选在 I, P 选在 N, 由于麦子是均匀分布的, 故可以認为矩形 $IKMN$ 与矩形 $ABPQ$ 的麦子的位置亦重合了, 同样将 Q 选在 M 上, C 选在 L 上, 則矩形 $MNFL$ 与矩形 $PQCD$ 中的麦子的位置相重合了.

設在矩形 $ABPQ$ 的位置 U 有一撮麦子, 而 U 距 OK 及 GD 的距离分别是 $x+a$ 及 $y+a$, 在矩形 $IKMN$ 中与 U 相对应的位置 V 处亦应有一撮麦子, V 距 OK 及 GD 的距离为 y 及 $x+a+b$.

因此

$$\overline{OU}^2 = (x+a)^2 + (y+a)^2 = x^2 + y^2 + 2a^2 + 2a(x+y)$$
$$< x^2 + y^2 + a^2 + b^2 + 2(a+b)x + 2ab = y^2 + (x+a+b)^2 = \overline{OV}^2$$

因 U 是任意的, 故将矩形 $ABPQ$ 中的麦子运至 O 所需的运力比将矩形 $IKMN$ 中的麦子运至 O 所需的运力小. 这証明了結論对"公"字矩形成立, 同理可証对"人"字矩形亦成立.

又設矩形 $PQCD$ 的位置 U' 处有一撮麦子, 而 U' 距 OK 及 GD 的距离分别是 $x'+a$ 及 y' 在矩形 $MNFL$ 中与 U' 相对应的位置 V' 处亦应有一撮麦子, V' 距 OK 及 GD 的距离为 y' 及 $x'+2a$ 所以

$$\overline{OU'}^2 = y'^2 + (x'+a)^2 < y'^2 + (x'+2a)^2 = \overline{OV'}^2$$

故将矩形 $PQCD$ 中的麦子运至 O 所需的运力比将矩形 $MNFL$ 中的麦子运至 O 所需的运力小. 这証明了結論对"社"字矩形成立, 同理可証对"民"字矩形亦成立. 从而結論 II 得証.

对于不規則麦地选場問題不能象以上这样簡单地解决．有人猜测是否是质量中心．这一猜测是不正确的．虽然問題較难，但我們有以下的直接办法来解决它．

先說明，对任一点 A 的运距計算法：收割后麦捆必然是依着一定的距离放在地里．我們把有麦捆处在图上打上个"×"．这块麦地对任一点 A 的运距就是这些"×"与 A 的运距之和(图 17)．

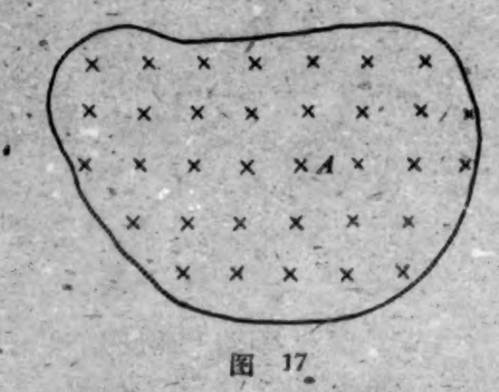


图 17

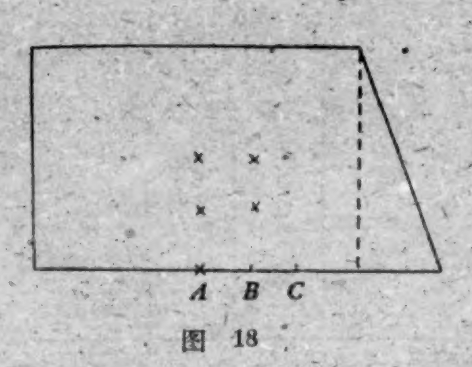


图 18

利用算运距的方法，可以决定图 18 中在边上設場的問題．先取一点 A，它是矩形部分的长边中点，然后算出运距．因为右边多了一个三角形，所以場可能設在更右边些．取 B（与 A 是两堆麦捆的距离）算出这麦地对 B 的运距．如果 B 小，再与其右的 C 点比較，如果 C 的运距大，則 B 点就是設場的地方了．

注意这个方法亦可用于麦地中小麦生成不均匀的情况．

§ 3. 选收点先于路綫的运輸問題

設有处于一般位置的 n 个发点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，发量各为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$．問何处設收点，然后沿連接收发点的联綫筑路，以使运輸力最省．

我們介紹一个力学的模拟方法来解这个問題．先在一块光滑木板上繪制 n 个发点的分布图．然后在这 n 个发点处各凿一光滑小洞．在平面上置一光滑金属小圓环，小圓环上系 n 条繩子，一条繩子穿过一个洞，通过表示发点 A_i 的小洞的繩子下面系以质量为 m_i 的重物．这样，当小圓环达到平衡位置时，平衡位置就是理想的收点．

我們来說明这个方法的理論根据．在地面上引入直角坐标，設发点 A_i 的坐标是 (x_i, y_i)，$i = 1, 2, \cdots, n$．問題是在地面上求一点 (ξ, η) 使

$$F(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} m_i \sqrt{(\xi - x_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}$$

最小．使 $F(\xi, \eta)$ 极小的条件是

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\xi - x_i}{\sqrt{(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_1)^2}} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\eta - y_i}{\sqrt{(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2}} = 0. \tag{2}$$

引入平面向量

$$e_i = \left(\frac{\xi - x_i}{\sqrt{(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2}}, \frac{\eta - y_i}{\sqrt{(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2}}\right),$$

于是(1),(2)两式可写作

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{e}_i = 0,$$

这是 n 个力 $F_i = m_i\mathbf{e}_i (i = 1, \cdots, n)$ 平衡的条件,而力学模拟制作过程中的光滑性要求只是为了減少摩擦力.

上面討論的一般問題包有选炼油厂址的問題为其特例. 如果 n 个发点都是油井,运油靠汽車进行,那么发量就是油井的日产量,这时要求运輸力最省. 如果运油靠修建油管来进行,那就要求油管长度最省,这时发量可以取作 1, 即 $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$.

注意:以上的方法并沒有解决极端情形的問題. 以下我們准备运用初等方法討論 $n = 3$ 及 $n = 4$ 而 $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ 的情形,并涉及极端情形.

首先,証下面 (i):

(i) 每一个內角都不超过 120° 的三角形 $\triangle ABC$, 若 P 是三角形內一点,且适合

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°,$$

則

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} < \overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ},$$

此处 Q 为 $\triangle ABC$ 中任一点.

在証明 (i) 之前先証明

(ii) 設 A 与 B 为圓外两点, A 与 B 的联綫与圓无交点,若圓上一点 C 适合

$$\angle OCA = \angle OCB,$$

此处 $\angle OCA$ 为鈍角而 O 为圓心,則对于圓上任一点 D 皆有

$$\overline{AC} + \overline{BC} < \overline{AD} + \overline{BD}.$$

証. 設 $\angle OCA = \angle OCB$. 过 C 作圓的切綫 l, 在圓上另取一点 D. 过 A 与 D 的直綫交 l 于 E. 設 A 关于 l 的对称点是 A', 則

$$\overline{AC} = \overline{A'C},\quad \overline{AE} = \overline{A'E},$$

而且 A', C, B 共綫,因此

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A'C} + \overline{BC} = \overline{A'B} < \overline{A'E} + \overline{ED} + \overline{DB}$$
$$= \overline{AE} + \overline{ED} + \overline{DB} = \overline{AD} + \overline{DB}.$$

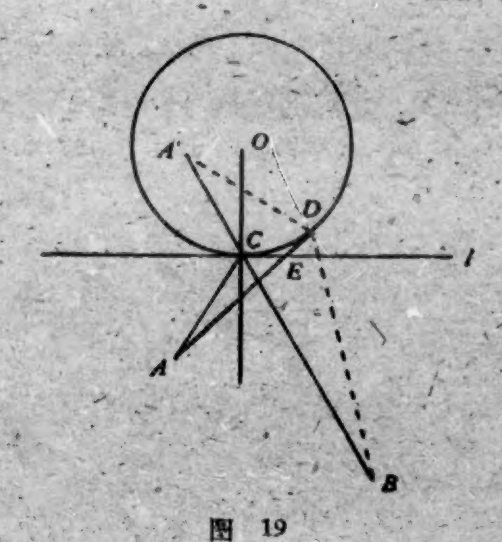


图 19

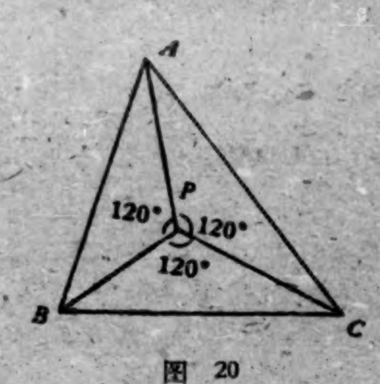


图 20

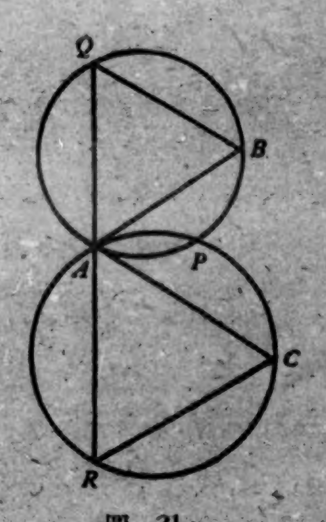


图 21

証完.

(i) 的証明：固定 $\overline{AP}=l_1$（l_1 小于 BC 边的高），则当 $\angle APB=\angle CPA$ 时，$\overline{BP}+\overline{CP}$ 最短，同时固定 $\overline{BP}=l_2$（l_2 小于 AC 边的高）. 当 $\angle APB=\angle CPB$ 时，$\overline{AP}+\overline{CP}$ 为最短，因此使 $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$ 最短的点 P 适合

$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ.$$

証完.

現在我們来談談 P 点的作图方法. 作等边三角形 $\triangle ABQ$ 及 $\triangle ACR$，再作它們的外接圓，这两个圓的交点 P 即所欲求.

事实上，由于 A, Q, B, P 四点共圓，所以 $\angle APB=180^\circ-\angle AQB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$. 同理 $\angle APC=120^\circ$. 因此

$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA.$$

附記：当 $\triangle ABC$ 中有一个角大于 120° 时（图 22），例如 $\angle C>120^\circ$，则在 $\triangle ABC$ 中任取一点 P，皆有 $\angle APB>\angle C$，因此适合

$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$$

的点 P 是不存在的，在这种情况下，我們有次之結論.

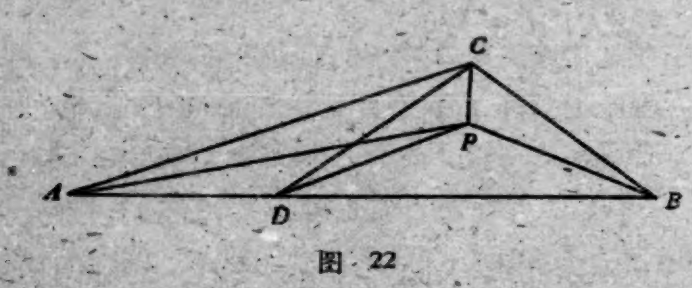


图 22

(iii) 当 $\angle C>120^\circ$ 时，$\triangle ABC$ 中任一点 P 皆适合

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{AC}+\overline{BC}.$$

証. 作 DC 使 $\angle DCB=120^\circ$ 则

$$\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}>\overline{DC}+\overline{BC}$$

（(i) 的极限情形）由于

$$\overline{PA}+\overline{DC}>\overline{AC}+\overline{DP}$$

（三角形两边之和大于第三边）因此

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}-\overline{CA}-\overline{CB}>\overline{PD}+\overline{PB}+\overline{PC}-\overline{CD}-\overline{CB}>0$$

命題証完.

(i) 和 (iii) 解决了 $n=3$, $m_1=m_2=m_3=1$ 的情形.

(iv) 每一个内角都不超过 180° 的四边形 $\square ABCD$，若其对角綫交于 P，则对任一点 Q 皆有（图 23）：

$$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}<\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}+\overline{DQ}.$$

証 由于 $\overline{BQ}+\overline{DQ}>\overline{BD}=\overline{BP}+\overline{DP}$,

$\overline{AQ}+\overline{CQ}>\overline{AC}=\overline{AP}+\overline{CP}$.

故明所欲証.

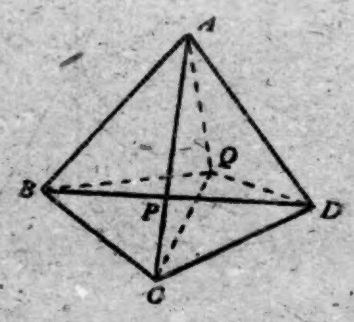


图 23

(v) 若四边形 $\square ABCD$ 有一个内角 $\angle BAD>180^\circ$. 则对于任一点 P 皆有：

$$\overline{BA}+\overline{CA}+\overline{DA}<\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}.$$

在証明之前先証明：在三角形 $\triangle RST$ 内任取一点 Z，則

$$\overline{RT}+\overline{ST}>\overline{RZ}+\overline{SZ}.$$

事实上，过 Z 作直綫分别交 RT 及 ST 于 F 及 G（图 24），則

$$\overline{RT}+\overline{ST}>\overline{RF}+\overline{FZ}+\overline{ZG}+\overline{GS}>\overline{RZ}+\overline{SZ}.$$

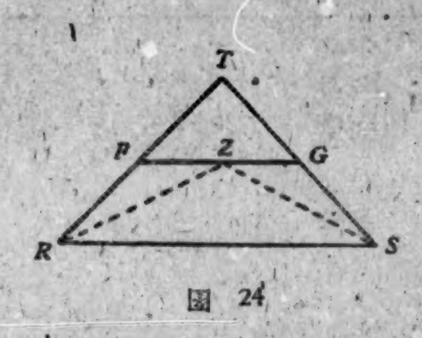


图 24

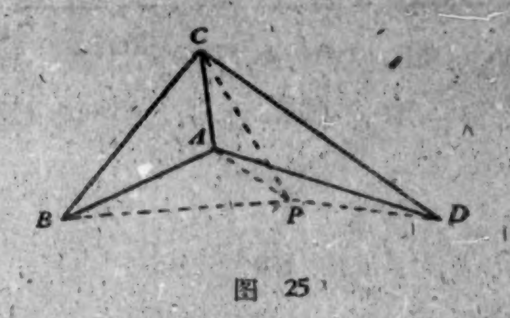


图 25

(v) 的証法如下（图 25）：由于

$$\overline{AP}+\overline{DP}>\overline{DA},\ \overline{CP}+\overline{BP}>\overline{CA}+\overline{BA},$$

故明所欲証.

(iv) 和 (v) 解决了 $n=4,\ m_1=m_2=m_3=m_4=1$ 的情形.

§4. 抽样估产

預估产量，对合理安排劳动力，运輸力、仓庫容量等都有很大的意义．已往預估产量主要是依靠农民的多年經驗，直观毛估．这样的估法誤差时小时大，并且不容易学会，我們所根据的基本原則是：

"每平方米的平均株数乘以每株的平均粒数，乘 4 除以 90，即得亩产斤数".

为什么乘 4 除以 90 呢？一市亩約等于 666.6 平方米，通常小麦每斤約有 15000 粒，因此得

$$\frac{666.6}{15000}=\frac{4}{90}$$

怎样算出平均株数和平均粒数？

首先进行分片，把生长情况相同的分在一片，根据各片面积的比例，确定出那一片要取多少平方米作为抽样，例如：一片約 70 亩的麦地，其中約有 10 几亩的小麦在水渠边，长得穗大粒飽，但較稀疏，中間有一块不到 30 亩，长得很密，但有倒伏現象，于是我們把麦田分为三片：

(i) 近沟渠穗大稍稀的；

(ii) 倒伏且密的；

(iii) 沒有倒伏而密的.

按面积的大致的比例，在第 (i) 类中任选一平方米，在 (ii)、(iii) 类中各任选两个平方米，成为五个抽查点.

这五个抽查点的数据如下：

編　号	株　数	任取一撮的株数	这撮的总粒数	这撮內每株的平均粒数
1(i)	789	18	439	439÷18=24.4
2(ii)	844	22	406	406÷22=18.5
3(ii)	852	28	552	552÷28=19.7
4(iii)	828	14	292	292÷14=20.9
5(iii)	824	13	276	276÷13=21.2

每平方米的平均株数等于

$$(789+844+852+828+824)\div 5=827.6,$$

每株平均粒数

$$(24.4+18.5+19.7+20.9+21.2)=20.9.$$

因此每平方米估計的粒数等于:

$$827.6\times 20.9=17296.84,$$

每亩总粒数是

$$17296.84\times 666.6=11530073.544,$$

每亩的产量数为

$$11530073.544\div 15000=768.8.$$

抽样的方法是用测框. 测框是用細木条式高梁杆作成的四边形,每边均为一米. 为了便于套在作物上,它的三边是固定不能移动的,唯第四边可以活动.

附記 1. 較可靠但稍麻煩的算法是,每平方米的平均粒数等于

$$\begin{aligned}(789\times 24.4+844\times 18.5+852\times 19.7+828\times 20.8+824\times 21.2)\div 5=\\ =(19251.6+15614+16784.4+17222.4+17468.8)\div 5=\\ =86341.2\div 5=17228.2,\end{aligned}$$

而以上的估計方法总是偏高了一些,原因是:前者相当于求

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right),$$

而后者相当于求

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

一般讲来株数多了,每株的粒数就少了,也就是說 a_i 大于 a_j 时,b_i 小于 b_j;a_i 小于 a_j 时,b_i 大于 b_j. 因此

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)=\frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\leqslant 0,$$

所以第一法的估价偏高了一些.

附記 2. 放框不同对估产是有影响的,一种是与播行平行放框;一种是与播行对角放框. 我們初步感到后者較好,但需要大家再作实驗.

附記 3. 在大面积收割时,为保証估产与收获量之間的誤差很小,我們必須考虑收割过程时的掉粒、掉穗、压場不淨以及晒干等损失,通常估計在 15—25% 之內.

附記 4. 較理想中的估产法:

1）空中照相，由感光度分区；

2）每一区中抽查若干平方米，得出这一区的亩产量的估算；

3）量出各区的面积；

4）各区的面积乘以該区的亩产量的平均数得整个产量；

5）再除以总亩数，便得所求的亩产量.

第11卷 第1期　　数学学报　　Vol. 11, No. 1
1961 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　March, 1961

电子学中的若干微分方程問題*

黄宏嘉
（中国科学院电子研究所　北京鉄道学院）

§1. 电子学现象的数学（微分方程）描述

电子学中的一些物理现象，和近代其它学科中的許許多多物理现象一样，常常是用微分方程来描述的．这是因为，尽管許多物理問題都包含着一系列相互制約的复杂的现象，但是，我們总还是可以研究这些现象的主要方面，并且就这些主要方面来說，除了在某些特殊时間以及在空間的某些特殊点，物理过程又常常可以看作是連續的．这样，电子学中許多物理問題的求解就常常归結为相应的微分方程問題的求解．

恩格斯說过："只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，并且也表明过程，即运动．"[1] 在处理电子学問題时，我們正是通过微分方程这一工具来解决在电子学領域中各种各样的状态和过程．但是，当我們处理具体的电子学問題时，我們应該选择什么形式的微分方程呢；或者說，用怎样的"微分方程語言"来描述这些問題呢？另一方面，当我們求出了微分方程的解之后，我們又将怎样理解这些解所代表的物理意义呢？經驗告訴我們，同样一个电子学問題可以用不同的"微分方程語言"来描述．选择不同形式的微分方程，那么，解决这些方程所用的数学方法也就随着不同．当然，只要是合理的选择，那么，从不同的方程和方法，我們都能得到代表相同物理意义的正确的数学結果．

1. 偏微分方程

1）在电子学中，最一般的問題是研究电磁場和电荷之間相互作用的现象．从数学的观点看，就是研究若干微分方程組的結合解．电磁場是用 Maxwell 場方程来描述的．場方程有許多不同的形式，最常用的是下面的偏微分方程組：

$$\begin{cases} \nabla\times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}^0, & \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \\ \nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho + \rho^0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t},\ \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},\ \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}+\mathbf{M}_0) = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_0.$$

这里，場矢量 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ 和 $\mathbf{J}$ 以及媒介質系数 ϵ, σ 和 μ 都是空間坐标和时間的連續函数．$\mathbf{J}^0$ 和 ρ^0 是"局外"的源函数，$\mathbf{M}_0$ 是恆磁感应．在实际問題中，常常会遇到媒介質特性突然改变的情形（例如，在自由空間和导体的接触面上）；在这样的情形下，如果我們找到接触面上場矢量之間的关系或边界条件，就能够把电磁場問題当作边值問題来处理．

描述电磁場的偏微分方程組(1)在一般情形下是和另外一些电子学现象的規律（微分

* 1961 年 2 月 9 日收到．

1) 見恩格斯著"自然辯証法"，1957 年中譯本，229 頁，人民出版社．

方程)互相联系着的．在量子电子学中，从理論上講，我們是研究电磁場方程組(1)和下面的 Schrödinger 方程的結合解：

$$-\frac{h^2}{8\pi^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\nabla_i^2\Psi+V\Psi=-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t},\tag{2}$$

这里 Ψ 是波函数；h, m_i 是常数；V 是晶格場电位．

实际上，場方程組和 Schrödinger 方程是不可分隔的．但是，为了避免数学上的困难，我們还只能够利用場方程組(1)求出場結构(場型)，然后再处理 Schrödinger 方程．这种方法当然是近似的，它只适用于小功率和小信号的情形．

在迴磁介質的电动力学問題中，我們是研究电磁場方程組(1)和下面的 Ландау-Лифшиц 方程的結合解：

$$\frac{dM}{dt}=\nu(\mathbf{M}\times\mathbf{H})-\frac{\delta}{M^2}[\mathbf{M}\times(\mathbf{M}\times\mathbf{H})],\tag{3}$$

这里 ν 和 δ 是常数．

相似的，在迴电介質問題中，我們是研究場方程組(1)和另一个和(3)形式相似的方程的結合解．和量子电子学問題相似，在迴旋介質的电动力学問題中，我們也还只能够近似地分别处理場方程組和 Ландау-Лифшиц 方程[1,2]．

相似的，在多电子系統的問題中，我們是研究电磁場方程組(1)和电子运动方程(Lorentz 方程)的結合解．这里的問題是怎样描述在多电子系統中形成的电流和电荷．在統計的平均的意义上，有限的、但却是大量的运动电子可以用連續的可微函数来描述．如果将电流和电荷分别表示为 $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)=e\int\mathbf{v}f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}$, $\rho(\mathbf{r},t)=e\int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}$, f 是电子分布函数(e 是电子电荷)，那么，电子运动方程就可以写成下面的形式(Boltzmann 形式)：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}(\nabla f)_r+\frac{e}{m}(\mathbf{E}+\mu_0\nabla\times\mathbf{H})(\nabla f)_r=0.\tag{4}$$

如果将分布函数表示为 $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\sum\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_i(t))$，那么，电荷和电流就化为 Dirac δ-函数的形式．在电子学中，我們常常用 δ-函数来描述电磁場中的特殊点．和前面叙述过的一些問題一样，在这里，我們也还只能够近似地分别处理場方程組(1)和运动方程(4)[3,4]．最近，提出了一个大信号有羣聚作用时的能量交换問題的解答[5]．

2) 在輻射問題中，需要决定电磁場和場源(一定分布的电流和电荷)之間的关系．我們仍旧用場方程組(1)来描述电磁場．从(1)，可以得出电場和磁場矢量的波动方程．在普遍的坐标系中，矢量波动方程的求解是困难的，因此，我們也常常通过一些輔助函数(波函数)来决定电磁場．假定媒介質是均匀的和各向同性的，电导率是零，那么，輻射問題就归結为下面的非齐次双曲型微分方程的求解：

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-g(x,y,z,t),\tag{5}$$

这里 ψ 是一个标函数，g 是場源的密度函数．

但是，电磁波在无限大的均匀各向同性媒介質中的传播只能說是一个"理想的"問題．实际的电磁波传播(大气空間的传播、沿地面的传播、地层內的传播、星际的传播，等等)，是复杂得多的电磁波問題．大地的球形使电磁波发生繞射("地波")；另一方面，大气上层

的空气游离层使电磁波发生一次或多次环繞地球的反射("天波"). 实际的問題是"地波"和"天波"在不同具体条件下的传播.

电磁波在空气游离层中的传播是一个复杂的物理过程. 游离层是非均匀的, 各向异性的,同时还具有若干統計的特性. 由于游离层包含带电质点,同时又存在于大地的恆定磁場中,因此,电波在游离层中的传播也涉及到場方程組和 Lorentz 方程的結合解問題.

同样,地波传播問題也涉及許多数学理論;例如,在关于地波传播的一个理論中,从波动方程得到下面形式的偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial \zeta^2} - i\left(\frac{\partial W_0}{\partial \rho} + \frac{\zeta}{\rho_0}\frac{\partial W_0}{\partial \zeta}\right) = 0, \tag{6}$$

边界条件是:在 $\zeta = 0$, $\frac{\partial W_0}{\partial \zeta} - q_1 W_0 = 0$; 当 $\rho_0 \to 0$ 且 $\zeta > 0$, $W_0 \to 2$. 除了这些条件,再加上适当的"无穷远处条件",就能够求出方程(6)的解[6,7].

3) 波导传输的理論工作要求解决許多重要的微分方程問題. 某些波导問題(如波导和空腔的激发,电磁波通过槽縫和小孔的耦合,"开"波导的"逸出波",半无限长波导輻射器,等等)是和天綫与輻射問題相似的. 在这方面,已經发表了一些基本的数学理論[8].

在波导理論中,一个重要的基本問題是波型分析; 数学上, 这种分析也就是将电磁波問題当作本征值問題来处理. 一般的,我們常常假定場矢量是时間的正弦函数,并且采用复量記号,即認为正弦函数是 $e^{i\omega t}$ 的虚部. 这样的假定并不影响分析的普遍性,因为,对于一般的时間函数,我們可以将它們表示为正弦函数的 Fourier 級数或 Fourier 积分. 波型分析的基本概念是用簡单波导結构中可能存在的一系列电磁場(波型)来代表实际的复杂波导中的电磁場. 最簡单的波导結构就是所謂"規則波导", 它是指一个无限长的导电率是无穷大的金属管,管的横截面处处相同,其中的媒介质是均匀的、各向同性的. 在分析簡单波导結构中的波型时,我們不考虑激发电磁場的源. 对于正弦交变場,在不考虑場源的情形下,我們处理下面形式的 Helmholtz 方程:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0, \tag{7}$$

这里常数 k 是波导中媒介质的波数. 对于一个横截面是均匀的波导, 存在着沿波导軸 z 按指数規律 $e^{-ik_z z}$ 变化的解(或波型). 将 ψ 表示为 $\psi_t e^{-ik_z z}$ (ψ_t 是横截面上两个坐标的函数),我們就能将(7)化为下面的形式:

$$(\nabla_t^2 + k_t^2)\psi_t = 0, \tag{8}$$

这里 ∇_t 是二維 Laplace 算符; $k_t^2 = k^2 - k_z^2$.

方程(8)加上具体問題的边界条件, 构成了波导的本征值問題[9]. 在一定的条件下(如波导电导率很高,沒有縫隙,等等),本征值是"离散"的,或者說,波导中的波型具有离散的"譜". 这个离散譜代表有限数目的传輸波型和无穷多个"消失波"的場.

如果波导壁的导电率不很高,或者一般的,对于所謂"开波导"(如涂有介电质膜的单根导綫),波型就不仅包含有限数目的离散譜,同时还包含一个"連續譜". 对于这种类型的波导,波型是下面的本征值問題的解[10]:

$$[\nabla^2 + (k^2 + \lambda)]\psi = 0, \tag{9}$$

这里 λ 是本征值.

在一些实际問題中，我們常常需要分析波导的不連續性对电磁波传輸的影响．在主波波导（即只传輸最低阶波型的波导）的不連續性問題中，有效地应用了許多数学物理的近似方法[11-18]．例如，在平行板波导电容性膜片的不連續性問題中，我們得到下面形式的計算膜片孔隙部分电場的积分方程：

$$I_0h_0(y) = -\int_{ap} G(y, y')E(y')dy', \tag{10}$$

$$G(y,y') = \sum_1^\infty Y_n h_n(y) h_n(y'),$$

这里 ap 代表膜片的孔隙部分，$h_0(y)$ 和 $h_n(y)$ 决定于平行板波导的本征函数．

我們很难严格地求出积分方程(10)的解，$E(y)$．但是，只要找到(10)的一个近似解，我們就能利用变分法来求(10)的准确的解．为了利用变分法，我們将(10)的两边乘以 $E(y)$ 并对于膜片孔隙积分，这样就得到下面計算膜片等效电納 $j\frac{B}{2}$ 的变分形式：

$$j\frac{B}{2} = \frac{I_0}{-\int_{ap} E(y)h(y)dy} = \sum_1^\infty Y_n \left(\frac{\int_{ap} E(y)h_n(y)dy}{\int_{ap} E(y)h(y)dy}\right). \tag{11}$$

对于我們所討論的問題，膜片孔隙部分的实际电場 $E(y)$ 是使等效电納取最小值．

在另外一些波导不連續性問題中，还遇到 Wiener-Hopf 型的积分方程，通常是利用变换方法来求这种方程的解．除此以外，我們还利用許多其它近似方法．例如：在变截面波导理論中，应用了 W. K. B. 方法，在螺旋波导理論中应用了"靜态"方法(这种方法在5)中还要討論)．

4）在电子学中，研究各种形式的过渡过程．过渡过程就是某种物理現象逐漸达到稳定状态的过程．

在常微分方程的 1）中我們将討論网絡問題的微分方程．对于綫性常系数网絡，过渡过程的問題已經完全解决．例如，采用了 Laplace 变換方法，就能得到常系数綫性常微分方程的完全解，这个解描述了电压、电流等物理量的全部变化过程，包括未稳定状态和最終的稳定状态(描述稳定状态的函数是网絡微分方程的特解)．事实上，用积分变換来分析网絡，甚至可以不去区分未稳定和稳定状态．在波导的波型分析中，我們只是研究了对于某一頻率的正弦交变場，也可以說，研究了波动方程的一些特解．在波导远程通信中，由于毫微秒短脉冲的应用，需要研究在很寬頻带內的电磁波传輸問題．这就要求我們去分析波导問題的过渡状态．在有关文献[19]中，处理了下面形式的波动方程：

$$\nabla^2\Pi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\Pi}{\partial t} = 0. \tag{12}$$

在一定的边界条件下，采用"不完全分离变数法"可以得到(12)的解(不完全分离变数法最早曾用来分析弹性力学[20])．

很多其它方面的电子学問題也都需要研究过渡过程．例如，在量子电子学中，需要研究弛豫时間問題；在这方面，目前还只有定性的理論．

5）在电子学中还經常处理"靜态"的場．当描述場的函数不随时間变化时，波动方程

就化为 Poisson 方程. 例如, 在电子管空間电荷效应問題中, 我們处理下面的考慮了电子运动定律的 Poisson 方程:

$$\nabla^2\psi = -\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2} J\psi^{-1/2}, \tag{13}$$

这里 m/e 是电子质荷比, J 是徙动电流密度, ψ 是所求的电子管电极間的电位分布. 实际的問題是求出(13)对于不同电极布置的解[21].

在不包含場源的空間,(13)的右边等于零,这时場函数适合 Laplace 方程.

在电子学中, Poisson 方程和 Laplace 方程的应用非常广泛. 事实上,它們不仅用来描述"靜态"的場,同时也用来描述"准稳态"的場. 例如,在頻率低的交变場中,我們可以用下面形式的 Poisson 方程来描述交变磁通在金属盘上感生的涡流場[22]:

$$\nabla^2\tilde{\Pi}_m = \mathbf{H}^{\text{стор}}. \tag{14}$$

如果 $\mathbf{H}^{\text{стор}} = \mathbf{z}_1\tilde{H}^{\text{стор}}$, 那么,在金属盘上不包含場源的部分,涡流場就构成下面形式的定解問題:

$$\begin{cases} \nabla^2\tilde{\Pi}_{mz} = 0 & \text{在域 } S \text{ 内}, \\ \tilde{\Pi}_{mz} = \text{常数} & \text{在 } S \text{ 的界限 } l \text{ 上}. \end{cases} \tag{15}$$

除了上述的准稳場問題外,在波导問題中,也常常将波导的不連續性問題化为 Laplace 方程的求解問題. 在一些可以看成是二維場的問題中,这种近似方法非常有效. 近年来,这种方法已用来决定特殊波导(如螺旋波导[23])的等效电磁場边界条件.

6) 上面所敍述的一些偏微分方程,(1)—(15),都是"場"問題的数学描述. 在电子学中,还有許多問題是当作"路"或"长綫"問題来处理的. "路"或"长綫"問題常常被看成是"場"問題的特殊情形,这是因为,描述"路"或"长綫"問題的 Kirchhoff 定律或长綫方程可以从 Maxwell 場方程推导出来[24—26]. 但是,相反的,一个通常当作"場"問題来处理的現象,如果用"路"的概念来分析,也完全是可能的[27]. 这里,我們看到:对于同样一个电子学現象,常常可以建立起不同的"数学結构". 虽然这样,我們也还是可以說,有些問題当作"場"問題来处理更合适,而另一些問題当作"路"問題来处理更合适.

在长綫(传输綫)問題中,长綫上的电压 v 和电流 i 随着时間和在綫上的距离的改变而改变. 这样的一个物理过程通常是用下面的偏微分方程(传输綫方程)来描述的:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_m}{\partial z} &= -\sum\left(G_{mn} + C_{mn}\frac{\partial}{\partial t}\right)v_n + \text{源函数}, \\ \frac{\partial v_m}{\partial z} &= -\sum\left(R_{mn} + L_{mn}\frac{\partial}{\partial t}\right)i_n + \text{源函数}, \end{aligned} \tag{16}$$

一般,式中的 G_{mn}, C_{mn}, R_{mn} 和 L_{mn} 是和电压、电流无关的常数.

在关于参量放大器的一种理論中,将行波参量放大器看作是"理想化"了的均匀传输綫,并且認为传输綫每单位长度的电感 L_0 是常数,而"电容" C_d 是变数. 这样,就得到下面形式的微分方程組:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_d\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = L_0\frac{\partial i}{\partial t}, \tag{17}$$

$$C_d = C_{d0}(1 + 2\eta v),$$

这里 C_{d0} 和 η 是比例常数．在一些近似的假定下，可以求出变系数偏微分方程組(17)的特殊解[28]．

2. 常微分方程

1）許許多多电子学現象都是用常微分方程来描述的．在网絡問題中，电压和电流都可以認为仅仅是一个变量(时間)的函数，因此，网絡中发生的物理过程就常常表示为一組常微分方程．网絡問題的微分方程也就是 Lagrange 方程在电磁学中的一种形式，通常表示为：

$$\sum_{s=1}^{n}\left(L_{rs}\frac{di_r}{dt}+R_{rs}i_r+\frac{1}{C_{rs}}\int i_r\,dt\right)=v_r(t),\quad r=1,2,\cdots,n. \tag{18}$$

对于一般的网絡結构，L_{rs}, R_{rs}, C_{rs} 都是正常数，并且 r, s 是可互易的．

一类实际的問題是給定 $v_k\neq 0$（其余的 v 函数都等于零），求解 i_k；这类問題就称为二端网絡的分析．同样，四端网絡的分析就是：給定两个 v 函数（$v_r\neq 0$, $v_s\neq 0$；其余的 v 函数都等于零），求解 i_r, i_s．相似的，还有 6 端、8 端和多端网絡的分析．常系数网絡的分析，从数学方法来說，已經完全解决．我們知道，在这里，最有用的方法就是采用 Laplace 变换，将(18)变换为下面的代数方程組：

$$\mathbf{Z}(\lambda)\mathbf{I}(\lambda)=\mathbf{V}(\lambda), \tag{19}$$

这里 $\mathbf{Z}$ 是 n 阶方陣，$Z_{rs}=\lambda L_{rs}+R_{rs}+C_{rs}/\lambda$；$\mathbf{I}$, $\mathbf{V}$ 都是 n 元列矩陣，

$$I_r(\lambda)=\int i_r(t)e^{\lambda t}dt,\quad V_r(\lambda)=\int v_r(t)e^{\lambda t}dt.$$

2）在电子学問題中，常微分方程不仅在描述一个自变量的若干函数之間的关系时是有用的，同时，在描述多个自变量(时間和空間)的若干函数之間的关系时，也非常有用．这是因为，虽然随时間和空間位置变化的物理过程是用偏微分方程来描述的，但是，在許多电子学問題中，我們常常是首先将偏微分方程化为常微分方程，然后求解．我們仍以波导传輸問題作为例子．如前所述，在波导問題中，我們以 $e^{i\omega t}$ 代表时間因子，从而只考虑空間位置函数的偏微分方程．这些方程的解可以用級数来表示，級数的每一項又可以表示为两个函数的积；这两个函数一是横截面坐标的函数(波型函数)，一是传輸方向的坐标的函数(幅度函数，或"电压""电流"函数)．可以証明，幅度函数滿足下面的常微分方程組("广义传輸綫方程組")：

$$\begin{cases}\dfrac{dE_m^+}{dz}=-\sum\limits_n\left(K_{mn}^+E_n^++K_{mn}^-E_n^-\right),\\[2ex]\dfrac{dE_m^-}{dz}=+\sum\limits_n\left(K_{mn}^-E_n^-+K_{mn}^+E_n^-\right),\end{cases} \tag{20}$$

这里 $E_m^\pm$ 代表向前波和向后波．一般，E_m^- 和 E_m^+ 相比可以忽略．这样，上面的方程組又可以进一步簡化．在实际的波导传輸問題中，变系数方程組是常常遇到的，特别是緩变系数的情形．在文献[29]中，証明了一个关于变元矩陣相似性的定理，从而利用迭代方法得出緩变系数联立方程組的近似解．

3）在电子学中，也遇到不同形式的非綫性常微分方程．例如，在游离层中电磁波传播的問題中，我們研究下面的描述电子浓度 N 的方程：

$$\frac{dN}{dt} = I_r - \alpha_e N^2. \tag{21}$$

右边第一項是在1秒內形成的新的电子,第二項是在同一时間內消失的电子. 在[30]中,写出了方程(21)的一种形式的解.

在非綫性网絡(电路)問題中,遇到許多不同形式的非綫性常微分方程的求解問題[31—33]. 例如,在电子管振蕩器分析中,遇到下面形式的方程[34]:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \epsilon(1 - y^2)\frac{dy}{dt} + y = 0. \tag{22}$$

§2. 电子学中的若干微分方程問題

偏微分方程方面, Maxwell 場方程組和 Schrödinger 方程的結合解,和 Ландау-Лифщиц 方程的結合解以及和 Lorentz 方程的結合解,这些都是在电子学中远远还沒有解决的重大的理論問題.

在电磁波传播和天綫理論中,許多重要的实际問題,例如对流层、电离层的传播,大天綫增益及阻抗的計算等等,都要求我們研究 Maxwell 場方程組或者是非齐次波动方程在更复杂条件下的求解. 同时,某些已經提出来的关于电磁波传播的基本理論(如"內部部分反射理論"),还缺乏严格的和物理实际相結合的数学論証.

在和波导理論有关的偏微分方程方面,許多本征值問題还沒有完全解决,或者完全沒有解决. 对于大多数的实际的波导,本征函数解一般很难求出;同时,当处理兼并本征值問題时,在选择本征函数解上也还有一定程度的不确定性. 如偏微分方程中3)所述,在波导理論中,特别是在大尺寸圓波导理論中,我們常常用結构比較簡单的波导的本征函数集(波型)来表示实际波导中的电磁場. 但是,究竟用什么样結构的波导的本征函数集来表示实际的电磁場呢? 事实上,可以找到若干个对应于不同波导結构的本征函数集. 关于本征函数集的完全性問題,由不同本征函数所构成的解的收斂性問題,以及若干个本征函数集之間的关系問題,等等,这些都是需要进一步研究的波导的数学理論.

波导传輸理論研究的另一主要方面是怎样将近代的許多数学物理近似方法特别是变分法用来解决多波型波导的各种不連續性問題(如前所述,許多近似方法已經用于传輸单一波型的波导). 除了应用已有的一些近似方法外,許多电磁波方面的实际問題还要求我們提出新的数学近似方法.

常微分方程方面,同样有許多工作要作. 例如,在波导传輸理論方面,需要求解下面形式的无穷多个联立的(常系数和变系数)一阶綫性微分方程組:

$$\frac{dP_j}{dz} + ih_jP_j = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_{ji}P_i, \quad j = -\infty, \cdots, +\infty. \tag{23}$$

网絡方面,如1)所述,网絡的"分析"問題,即給定 L_{rs}, R_{rs}, C_{rs} 和 $v_r(t)$ 求解 $i_r(t)$ (或給定 **Z**, **V**, 求 **I**)的問題,已經完全解决. 但是,相反的問題也就是网絡的"綜合"問題,即使是在常系数的情形下也还沒有完全解决. 网絡"綜合",这是近年来网絡理論的一个重要的发展方向,这是因为,在实际工程問題中,我們不仅需要分析給定的网絡結构,还需要根据某些传輸特性来进行許多特殊网絡(如噪声过滤器、噪声預測器等等)的最佳設

計．数学上，就是根据給定的 $i_r(t)$ 和 $v_r(t)$，或者是給定的 $\mathbf{Z}$，来决定在滿足正常数和互易条件下参数 L_{rs}，R_{rs}，C_{rs} 的值．自然，这样的解并不是唯一的；但是，对于工程問題来說，能够找到一个或一些有用的解，就有很大的实际意义．

在网絡問題，特别是在参量放大器問題中，遇到形式和(18)相似但系数是 t 的函数的变系数常微分方程組．这些方程的求解問題还远远沒有解决．最簡单的变系数网絡(电路)方程可以表示为：

$$\frac{dL(t)}{dt} i(t) + R(t)i(t) + \frac{1}{C(t)}\int i(t)\,dt = v(t). \tag{24}$$

即使是这个最簡单的变系数常微分方程的"分析"問題，也沒有完全解决，更不要說是"綜合"問題了．在这方面，已經提出过采用广义函数变换的方法[35]．但是，从数学理論和方法上解决变系数常微分方程組的分析和綜合問題，还需要进行大量的研究工作．

微分-积分方程和积分方程方面，需要作的工作也很多．例如，在天綫理論中，很早就已得到决定柱形偶极子电流分布的特殊形式的积分方程[36]，但这方程的解到現在还沒有求出．

在电子学的数学理論中，微分方程和概率論的結合是一个新的发展方向．如前所述，电子学中的某些微分方程（如 Boltzmann 的多电子系統方程）已經包含着大量平均的性質．此外，一系列的电子学問題（如噪声过滤器，噪声預測器），也都联系着具有这样或那样随机性質的函数．事实上，已經提出来的微分方程問題很多都是和概率問題分不开的．随着电子学的发展，微分方程和概率論的結合問題将显得更加重要．作为举例，这里我們叙述几个有关这方面的实际問題．在电磁波传播問題中，大地結构的不均匀性以及空气和游离层的不均匀性都是随机的．这样的問題可以說是一个包含具有随机边界条件和随机系数的偏微分方程（場方程）的求解問題．在这方面，文献中已經发表了若干理論工作[37]，但是，許多数学理論問題还需要进一步解决．在波导远程传輸理論中，求解具有随机性質的偏微分方程和常微分方程是有很大实际意义的．在一个远程波导系統中，不規則性和不連續性（如接头的歪斜或錯开、散乱小偏斜，等等）具有随机的性質．因此，对于这样的問題，传輸綫方程組的系数应該根据統計理論来决定．在最近的文献中，討論了长綫的統計理論[38]．但是，关于这个課題的研究远远还沒有結束．另一个波导传輸中的随机問題是計算脉碼传輸失眞的或然率[39]．

結　束　語

上面叙述的几种形式的微分方程問題只能說是一些具有代表性的举例．随着电子学的不断科学实践，在一个个新的电子学現象的描述中，将会出現更多的新的微分方程問題．电子学的发展在很多方面依靠微分方程这个有利的工具．同样，微分方程和数学的其它分支一样，从来就是在密切联系生产实际中汲取它生长的营养．我們衷心希望更多的数学家和青年数学工作者来参加电子学中各个方面的理論工作．在电子学理論中，数学家不仅能够解决已經提出来的一系列的微分方程問題，同时还能够找到許許多多新的微分方程問題．我們相信，数学家和电子学工作者一起，将会在这个近代尖端科学領域中沿着党所指引的科学研究方向作出巨大的貢献．

参 考 文 献

[1] P. S. Epstein, Theory of wave propagation in gyromagnetic medium, *Rev. of Modern Phy.*, **28** (1956), 3—17.

[2] H. Shul and L. R. Walker, *B. S. T. J.*, **33** (1954), 579—659; 939—986; 1133—1194.

[3] В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. Гостехиздат, Москва, 1953.

[4] А. А. Власов, Теория многих частиц, Гостехиздат, Москва, 1950.

[5] Л. А. Вайнштейн, *Р. И. Э.*, **2** (1957) 883—894, *Р. И. Э.*, **2** (1957), 1027—1047.

[6] М. А. Леотович и В. А. Фок, Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения, Исследования по распространению радиоволн, Сборник второй, Изд. АН СССР, Москва, 1948.

[7] 陈敬熊,无綫电波在球面上传播的半影区問題——留数級数的求和,电子学研究, **2** (1957), 56—64.

[8] Л. А. Вайнштейн, Изв. АН СССР, серия физ. **12** (1948), 144—165 и 166—180; *Ж. Т. Ф.*, **18** (1948), 1543—1564; *Ж. Т. Ф.*, **19** (1949), 911—930; *ДАН СССР*, **74** (1950), 485—488; **74** (1950), 909—912.

[9] N. Marcuvitz, Waveguide Handbook, McGraw-Hill, New York, 1951.

[10] L. Felsen, Mode and field problems in non-conventional waveguides, Proc. of the Symposium on Modern Advances in Microwave Techniques, Polytechnic Inst. of Brooklyn, 1954, 490.

[11] N. Marcuvitz and J. Schwinger, On the representation of the electric and magnetic fields produced by currents and discontinuities in waveguides, *J. A. P.*, **22** (1951), 806—819.

[12] Ш. Е. Цимринг, *Р. И. Э.*, **2** (1957), 3—14; *Р. И. Э.*, **2** (1957), 969—988.

[13] Ll. G. Chambers, An approximate method for the calculation of propagation constants for inhomogeneously filled waveguides, *Quart. Journal of Mech. and Applied Math.*, **7** (1954), 299—316; Propagation in a ferrite-filled waveguide, *ibid*, **8** (1955), 435—477; A variational principle for the conduction of heat, *ibid*, **9** (1956), 234—235.

[14] 林为干,非理想波导理論的一些补充,科学記录, **1** (1957), 27—31.

[15] 卢文,关于分层介质波导理論,科学記录, **1** (1957), 317—320.

[16] R. E. Collin and R. M. Vaillancourt, Application of Rayleigh-Ritz method to dielectric strips in waveguide *IRE TRAN MTT*, **5** (1957), 177—184.

[17] A. F. Stevenson, General theory of horn, *J. A. P.*, **22** (1951), 1447—1460.

[18] В. Л. Покровкий, Ф. Р. Улинич, С. К. Саввиных, К теории волноводов переменного сечения, *Р. И. Э.*, **2** (1959), 161—171.

[19] А. А. Ковтун, Нестационарные процессы в волноводе, *Р. И. Э.*, **3** (1958), 661—674.

[20] Г. И. Петрашень, Динамические задачи теории упругости, *Уч. зап. ЛГУ*, **24** (1951), 149; **26** (1952), 162; **27** (1953), 170; **28** (1954), 177; **30** (1956), 208.

[21] В. П. Кан, Точное решение задачи Лэнгмюра для шарового конденсатора, *Ж. Т. Ф.* **18** (1948), 483—494; Р. П. Поплавский, Распределение потенциале в шаровом коденсаторе в случае тока насыщения, *Ж. Т. Ф.*, **20** (1950), 149—159.

[22] 黄宏嘉,翼式感应継电器中扇形金属盘上的渦流場,物理学报, **12** (1956), 511—527.

[23] В. З. Каценеленбаум, Затухание волн H_{01} в спиральном волноводе, *Р. И. Э.*, **4** (1959), 428—432.

[24] S. A. Schelkunoff, Generalized telegraphist's equations for waveguides, *B. S. T. J.*, **31** (1952), 784—801; *ibid*, **34** (1955), 995—1043.

[25] Б. Ф. Емелин, Волноводные уравнения для нерегуляных волноводов, *Р. И. Э.*, **3** (1958), 615—627.

[26] G. Reiter, Generalized telegraphist's equation for waveguide of varying cross-section, *P. I. E. E., Pt. B Supplement*, **106** (1959), 54—57.

[27] S. A. Schelkunoff, Methods of electromagnetic field analysis, *B. S. T. J.*, **27** (1948), 487—509.

[28] A. L. Cullen, Theory of the travelling wave parametric amplifier, *P. I. E. E., Pt. B*, **107** (1960), 101—107.

[29] 黄宏嘉, Generalized theory of coupled local normal modes in multi-waveguides, *Scientia Sinica*, **9** (1960), 142—154 (多波型波导耦合本地簡正波型的广义理論,中国科学).

[30] М. П. Долуханов, Распространение радиоволн, связьиздат, Москва, 1952.

[31] П. А. Ионкин, Электричество, **12** (1956), 21—25.

[32] 王显荣，論复杂磁路和非綫性直流电路的普遍解法，物理学报，**15** (1959)，113—130.
[33] 虞厥邦，論具有恆定通量的复杂非綫性网絡的試探解法，物理学报，**15** (1959)，588—602.
[34] *Proceedings of the Symposium on Modern Network Synthsis*, Polytecnic Institute of Brooklyn, 1952.
[35] N. W. MacLachlan, Engineering Applications of Nonlinear Theory, *Proc. of the Symposium on Nonlinear Circuit Analysis*, Polytecnic Institute of Brooklyn, 1956.
[36] J. Anaroni, Antennae, Oxford, at the Clarendon Press, 1946.
[37] 吕保維，Theory of forward-scatter propagation of ultrashort radio waves, *Scientia Sinica*, **8** (1959), 761—780 (超短无綫电波向前散射传播理論，中国科学).
[38] H. E. Rowe and W. D. Warters, Transmission deviations in waveguides due to mode conversion (theory and experiment), *P. I. E. E., Pt. B Supplement*, **106** (1959), 30—36.
[39] В. И. Бунимович, В. А. Морозов, О вероятность искажений вызванных попутным потоком и гауссовым, шумом, *Р. И. Э.*, **4** (1959), 1585—1593.

第11卷 第1期 数学学报 Vol. 11, No. 1
1961年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA March, 1961

直流同步随动系統的理論分析*

疏松桂 范鳴世
(中国科学院自动化研究所)

§1. 前言

现代許多生产机械,如大型桥式起重机,大型水庫閘門,重型車床等生产机械,往往要求两根或多根机械軸的旋轉速度完全一样,或保持一定的比例关系,换言之,即要求两根或多根軸同步协調旋轉. 关于实現同步协調,可采用机械的办法,也可采用电的办法,在一般情况下,由于要求同步协調旋轉的两根或多根軸的装設位置不同,彼此相距很远(达数十米或更远),如采用机械方法联系,不但制造困难,成本高,而且由于条件限制,不是弹性变形不能满足刚度上的要求,就是完全不可能,因此需要采用电的办法实現同步协調. 电的同步协調系統可分为交流电軸系統和直流同步随动系統两大方案. 本文提出了新的直流同步随动系統,即自行协調系統,这种系統对某些要求同步十分严格的生产机械,比导引协調系統能得到更好的同步性能. 关于交流电軸系統方案,此处不再予以討論. 本文专門討論直流同步随动系統(包括自行协調系統). 与交流电軸方案相比,本方案的优点是:1)在拖动电动机軸与自整角机間装一适当的減速齿輪,可以做到在很大的失調角范围内都具有自同步性能,因此在启动时不需要另行整步,在运行中承受冲击能力大; 2)利用反饋回路中的放大設备可以加強同步能力;3)引用反饋回路(綫性或非綫性)串联网路,稳定变压器等装置,可以改善系統品质(加快过渡过程,提高稳定度,消除或減弱振蕩). 系統的缺点是比电軸方案較为复杂,維护比較困难,因此如何实現这个方案的优点,需要經过詳細的分析研究,才可能选定系統的最佳結构和最适当的参数范围,以满足系統的要求.

§2. 綫路的选择

生产机械对电力拖动的主要要求是在一定的調速范围內,均能保証各軸間的同步运行. 为确切起見,下面假設要求保持4根軸,即四台拖动电动机的同步运轉,一般生产机械要求系統具有較大的稳定度,反应快,其稳态和动态誤差小. 根据这些要求,可以考虑采用公共发电机供电带升压机同步的协調控制系統和采用四个单独的 Γ—$Д$ 系統二个比較方案. 經过初步研究后,我們認为,在前一系統中,由于采用了公共发电机,对每个电动机而言,其端电压是一样的,这样,系統将具有"初同步"的作用,因而消除了后一系統由于四个放大机,四个励磁机和四个发电机的特性不一致所引起的誤差. 其次由于升压机的容量比較小,其时間常数将較后一系統中的发电机为小,反应比較快,因而避免了大容量

* 1961年2月12日收到.

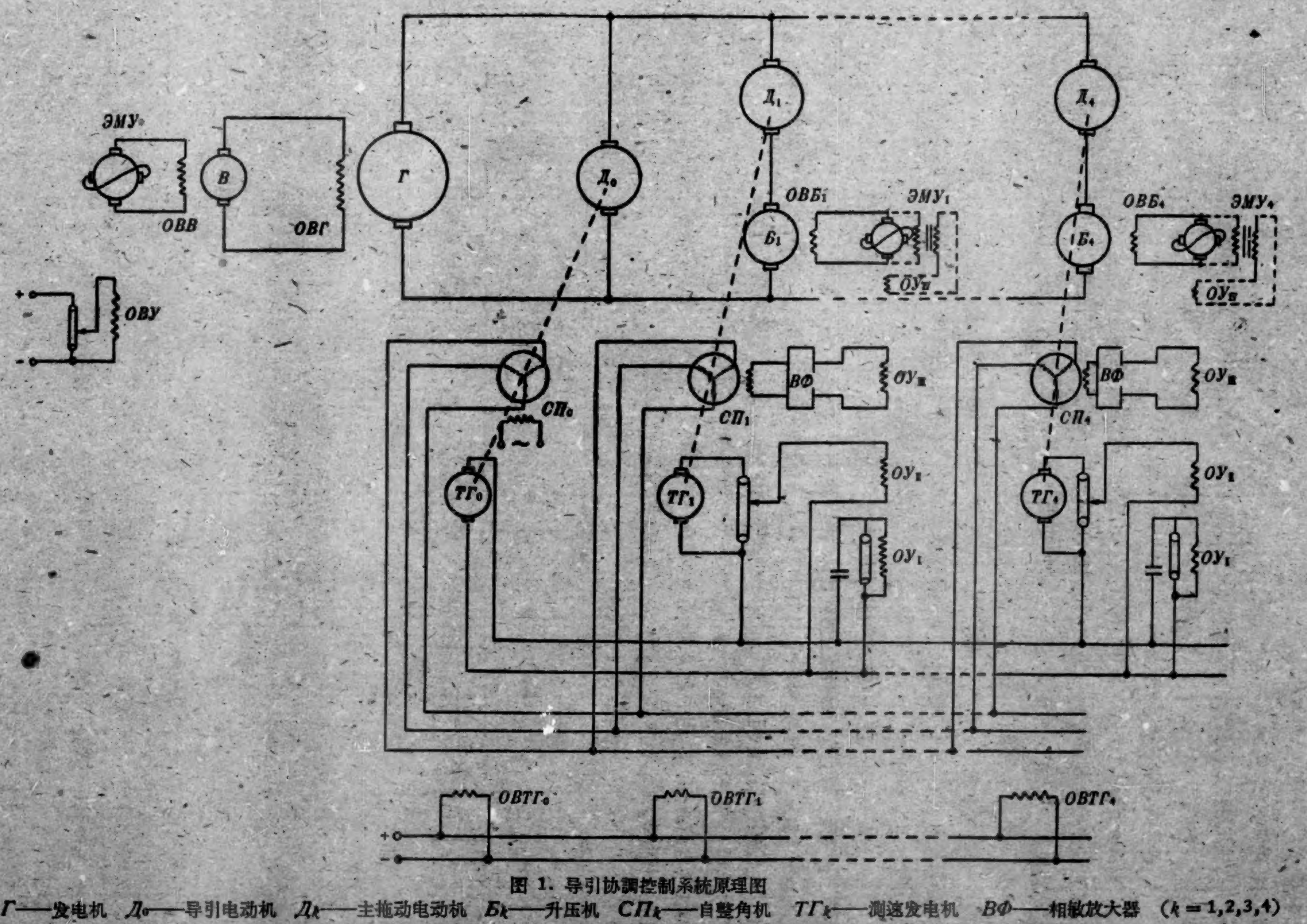


图 1. 导引协調控制系統原理图

Г——发电机　$Д_0$——导引电动机　$Д_k$——主拖动电动机　$Б_k$——升压机　$СП_k$——自整角机　$ТГ_k$——测速发电机　ВФ——相敏放大器　$(k=1,2,3,4)$

注：如果采用一个拖动点的拖动电动机作导引电动机，則图中 $Д_0$ 机組变为 $Д_1$；$Д_1$ 机組变为 $Д_4$ 机組，其余类推。

发电机激磁繞組时間常数过大的問題．因此，在一般生产机械中我們建議采用前一方案，而不采用四个单独的 Г—Д 系統．

采用公共发电机带升压机的协調控制系統，我們又考慮了下面两个方案，即 1) 导引协調控制系統(图 1)；2) 自行协調控制系統(图 3)．玆分述于下：

1. 导引协調控制系統

图 1 是导引协調系統的綫路图．在这个系統中，各电动机 $Д_1, \cdots, Д_4$ 由公共发电机供电，基础速度的調节，依靠放大机 ЭМУ 和激磁机 B 調节发电机的电压来达到．各电机之間的同步，由升压机 $Б_1, \cdots, Б_4$ 实现．

采用导引协調的方法有二：

1) 采用单独导引电动机．为了保証四点运行的对称，采用导引电动机 $Д_0$ 带动自整角机 $СП_0$ 和测速发电机 $ТГ_0$．由于每个电动机同步系統是完全一样的，因此，下面仅以一个为例加以說明．

系統的角差控制，由自整角机 $СП_0$ 与 $СП_1$ 經相敏放大器 $Вф$，电机放大机 ЭМУ，升压机 $Б_1$ 来实现．角差的导数控制則借测速发电机 $ТГ_0$ 与 $ТГ_1$ 来实现．

2) 采用一个拖动点的拖动电动机作导引电动机．此方法是将图中 $Д_0$ 机組变为 $Д_1$ 机組；$Д_1$ 机組变为 $Д_2$ 机組，与前一方法比較可省掉一套机組及其控制設备．

导引协調系統的結构图是根据图 1 注作出的，如图 2 所示．加于电动机的負載轉矩与主发电机电压 $u_Г$ 用一等效电压 u 代表(詳見附录)．放大机各个控制繞組在結构图中假定是一样的，其时間常数 T_2 为等效值(詳見附录)．

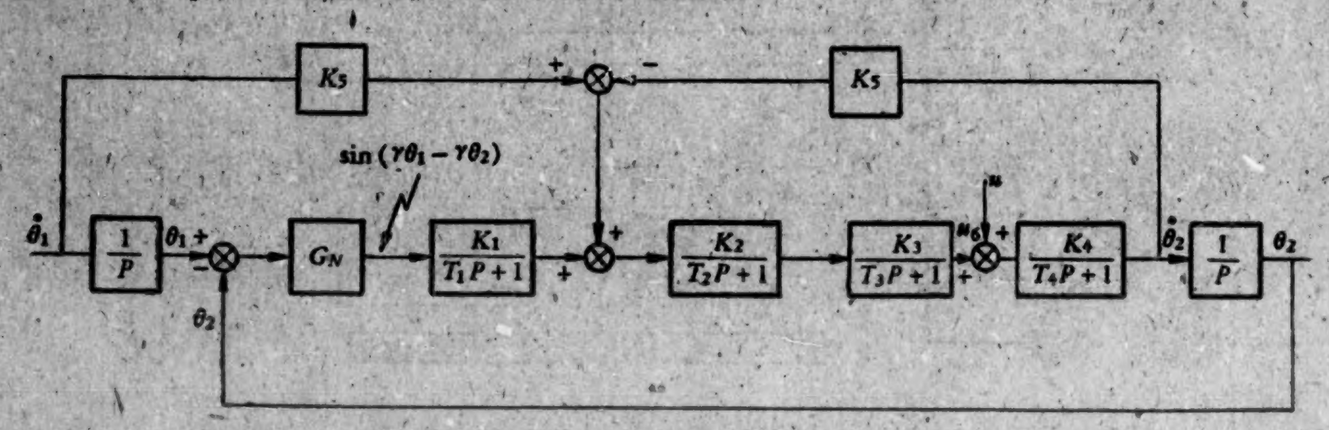


图 2. 导引协調系統的結构图(以 $Д_1$ 为导引电动机)

G_N——自整角机的非綫性传递数
K_1——相敏放大器的放大系数(包括自整角机传递函数的幅值)
T_1——相敏放大器的时間常数
K_2——放大机的放大系数
T_2——放大机的等效时間常数
K_3——升压机的放大系数
T_3——升压机的时間常数
K_4——电动机的放大系数
T_4——电动机的时間常数
K_5——测速发电机的放大系数
u——加于电动机的負載轉矩与发电机电压的等效合成电压
γ——电动机軸上电角度轉换至自整角机軸的轉换系数

图 1 中用虛綫画出的稳定环节(包括稳定变压器和控制繞組 $ОУ_{IV}$)，在結构图 2 中沒有画出．

2. 自行协調控制系統

图 3 是自行协調系統的綫路图．系統的同步，仍然采用升压机来实现．这里沒有导

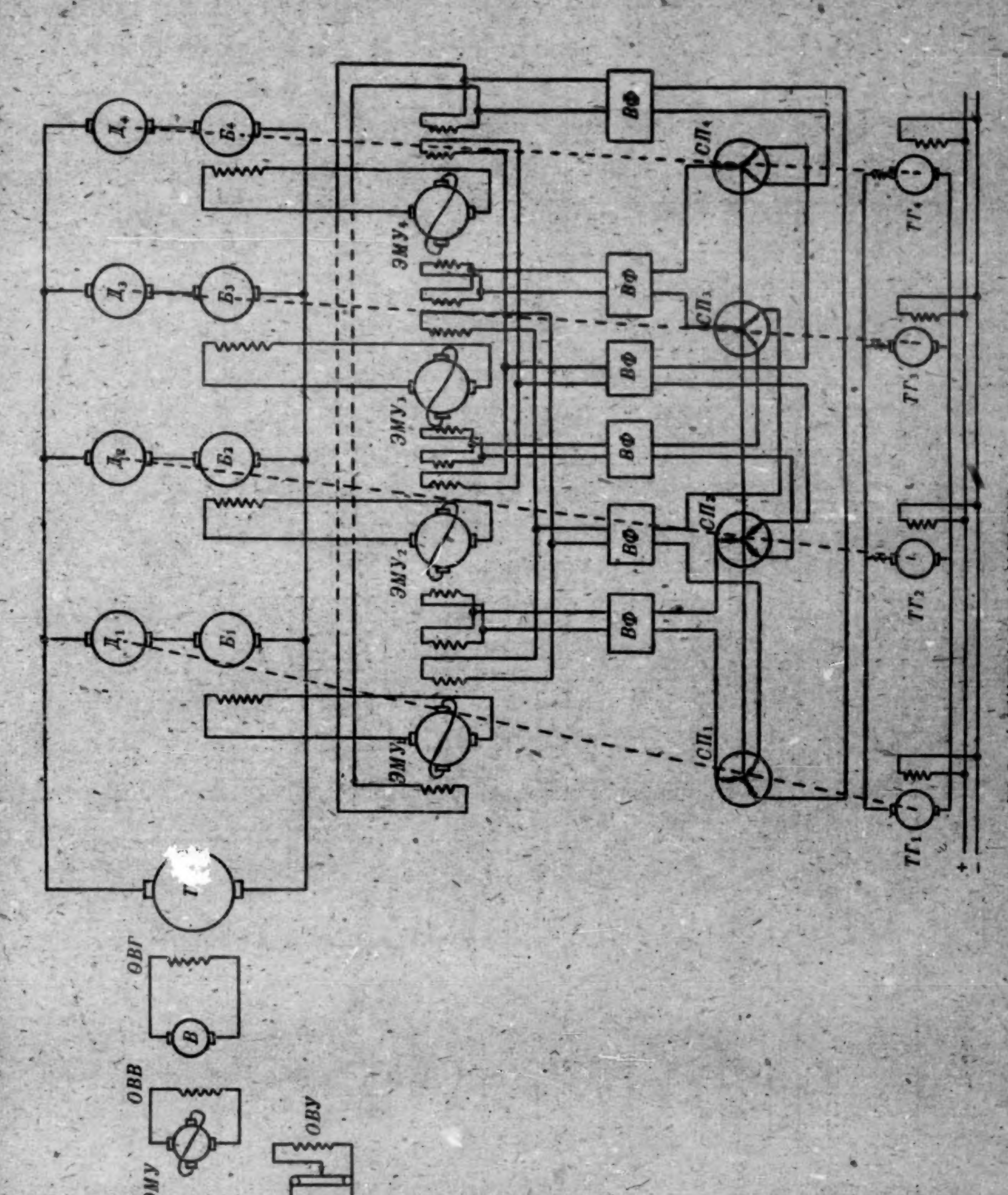


图 3. 自行协调控制系統的原理图

Б——升压机　СП——差动自整角机或小型三相繞組感应式电动机（轉子部分接电源，未画出）

ВФ——相敏放大器　ТГ——测速发电机

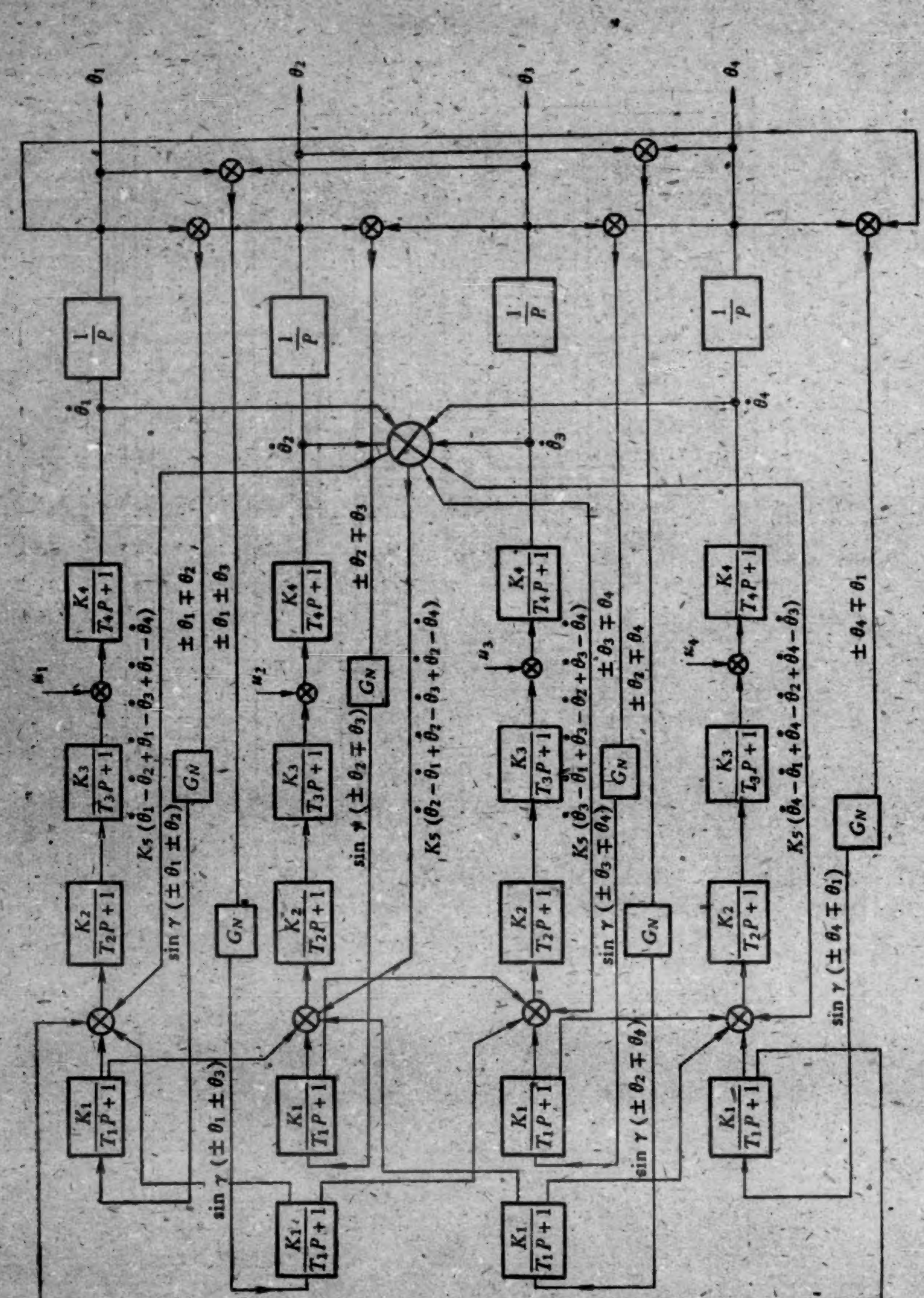


图 4. 自行协调系统的结构图

G_N——自整角机的非线性传递函数　K_1——相敏放大器的放大系数(包括自整角机传递函数的幅值)　T_1——相敏放大器的时間常数　K_2——放大机的放大系数　T_2——放大机的等效时間常数　K_3——升压机的放大系数　T_3——升压机的时間常数　K_4——电动机的放大系数　T_4——电动机的时間常数　K_5——测速发电机的放大系数　u_1,u_2,u_3,u_4——发电机电压和負載轉矩的合成等效电压

引信号，系統符合自行协調原則[1,2].

理論上各差动自整角机(或小感应机)連接成为順磁場或逆磁場旋轉均可，但为避免接近同步速时信号过弱(頻率过低)的緣故，应采用逆磁場旋轉. 当主拖动电动机反向旋轉时，应用接触器变换供电电源的相序，此外，为使电源与信号的頻率一致，相敏放大器应自差动自整角机(或小感应机)取得电源.

当两个电动机 $Д_1$ 与 $Д_2$ 出現角度偏差时，自整角机 $СП_1$ 与 $СП_2$ 反映出的角差訊号給相敏放大器 $Bф$，同时作用到两个放大机 $ЭМУ_1$ 和 $ЭМУ_2$ 的控制繞組，使一个升压机(例如 $Б_1$)的电压增加，另一个升压机(例如 $Б_2$)的电压減少，以保証系統的同步. 其他角度偏差信号的作用依此类推. 角差信号的取法可以有多种多样，理論上只要有三个独立信号即可，这里取用所有的六个信号，是为了加強控制作用及对称的緣故. 这样每个放大机需要三个控制繞組，作为角度偏差信号控制之用，但是如果把三个角差信号同时輸入到一个相敏放大器，则角差控制只要使用放大机一个控制繞組.

在系統中还采用测速发电机实現速度反饋，四个测速发电机各經过放大机的一个控制繞組，彼此并联，这样，当任意一个电动机的轉速改变时，同时产生訊号，旣調节这个电动机本身的轉速，也調节其他三个电动机的轉速，以加強各个电动机之間的同步.

自行协調系統的結构图如图 4 所示. 和前一系統一样，輸入系統的等效电压 u_1, u_2, u_3, u_4 旣包括主发电机 u_r，也包括負載轉矩所引起的效应(参考附录).

§3. 系統分析与比較

1. 基本运动方程式的建立

根据牛頓第二定律可以写出直流同步随动系統(图 1 或图 3)的运动方程如下:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{J_1}{P}\frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= M_1(\dot{\theta}_1,\theta_{1l},\dot{\theta}_{1l}) - M_{c1}(\dot{\theta}_1,\theta_{1l}),\\
\frac{J_2}{P}\frac{d^2\theta_2}{dt^2} &= M_2(\dot{\theta}_2,\theta_{2l},\dot{\theta}_{2l}) - M_{c2}(\dot{\theta}_2,\theta_{2l}),\\
\frac{J_3}{P}\frac{d^2\theta_3}{dt^2} &= M_3(\dot{\theta}_3,\theta_{3l},\dot{\theta}_{3l}) - M_{c3}(\dot{\theta}_3,\theta_{3l}),\\
\frac{J_4}{P}\frac{d^2\theta_4}{dt^2} &= M_4(\dot{\theta}_4,\theta_{4l},\dot{\theta}_{4l}) - M_{c4}(\dot{\theta}_4,\theta_{4l}),
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中

P = 拖动电动机极对数;

J_k = 各套机組及其拖动物体的轉动慣量(折合到电动机軸上);

M_k = 电动机的轉矩，是角速度 $\dot{\theta}_k$，失調角 θ_{kl} 及其导数 $\dot{\theta}_{kl}$ 的函数;

M_{ck} = 負載轉矩，是角速度 $\dot{\theta}_k$ 及失調角 θ_{kl} 的函数;

θ_k = 各套机組的轉角(电角度)　($l = 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 2, 3, 4$).

現在按照生产机械的实际情况，引用下面三条假設来簡化上列的运动方程.

1) 假定各套机組及其拖动物体的总轉动慣量彼此相等，即

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = J, \tag{2}$$

这里是等于把拖动物体分成了四块，每套机組拖一块，换句話說，就是四个拖动点所拖的

重量相同.

2) 負載轉矩与失調角成綫性关系而与速度无关,前者是考虑到負載随失調角而变化的影响,后者是忽略机械阻尼作用,即

$$M_{ck} = M_{ck0} - \sum_{l=1}^{4} M_{ckl}\theta_{kl}, \tag{3}$$

式中

$$\theta_{kl} = \theta_k - \theta_l, \quad k = 1, 2, 3, 4;$$

M_{ck0} 表示第 K 台机組軸上的恆定負載;

$\sum_{l=1}^{4} M_{ckl}\theta_{kl}$ 表示随失調角而变化的負載.

3) 假定拖动电动机的磁場是恆定的(他激电动机,忽略飽和,磁滞及电枢反应等影响),則轉矩为

$$M_k = C_M \frac{u_k - C_l\dot{\theta}_k}{R},$$

式中 R 是电枢电阻,C_M, C_l 是常数. 电动机端电压等于发电机端电压加上升压机端电压,即

$$\begin{aligned} u_k &= u_r + u_{bk} \\ &= u_r + G_b(p)\sum_{l=1}^{4}\dot{\theta}_{lk} + G_c(p)\sum_{l=1}^{4}\sin\gamma\theta_{lk} \\ &= u_r - G_b(p)\sum_{l=1}^{4}\dot{\theta}_{kl} - G_c(p)\sum_{l=1}^{4}\sin\gamma\theta_{kl}, \end{aligned}$$

式中

$G_b(p)$ = 轉速反饋回路的传递函数;

$G_c(p)$ = 轉角反饋回路的传递函数;

γ = 拖动电动机失調角轉換到自整角机失調角的系数. 将 u_k 代入上面第一式,則得

$$M_k = \frac{C_M u_r}{R} - \frac{C_M C_l}{R}\dot{\theta}_k - \frac{C_M}{R}G_b(p)\sum_{l=1}^{4}\dot{\theta}_{kl} - \frac{C_M}{R}G_c(p)\sum_{l=1}^{4}\sin(\gamma\theta_{kl}). \tag{4}$$

根据上面三条假設的結果,将(2),(3),(4)各式代入(1),則得

$$\begin{aligned} \frac{J}{P}\frac{d^2\theta_k}{dt^2} = \frac{C_M u_r}{R} - \frac{C_M C_l}{R}\dot{\theta}_k - \frac{C_M}{R}G_b(p)\sum_{l=1}^{4}\dot{\theta}_{kl} - \\ - \frac{C_M}{R}G_c(p)\sum_{l=1}^{4}\sin(\gamma\theta_{kl}) - M_{ck0} + \sum_{l=1}^{4}M_{ckl}\theta_{kl}. \end{aligned} \tag{5}$$

将(5)式等号右边各項移到左边,然后除以 $\frac{C_M C_l}{R}$ 并令 $\frac{JR}{PC_M C_l} = T_4$ = 拖动电动机的机电时間常数,則得

$$T_4\frac{d^2\theta_k}{dt^2} + \frac{d\theta_k}{dt} + \frac{1}{C_l}G_b(p)\sum_{l=1}^{4}\frac{d\theta_{kl}}{dt} + \frac{1}{C_l}G_c(p)\sum_{l=1}^{4}\sin(\gamma\theta_{kl}) -$$

$$-\frac{R}{C_M C_l}\sum_{l=1}^{4} M_{ckl}\theta_{kl}+\frac{R(M_{ck0}-M_0)}{C_M C_l}=0 \tag{6}$$

$$\left(k=1,2,3,4;\quad M_0=\frac{C_M u_r}{R}\right).$$

这是一般的运动方程，适用于导引协調控制系統，也适用于自行协調控制系統，下面再具体分析这两种系統的运行性能.

2. 导引协調控制系統的分析

导引协調系統可以有二种实現方法，一种是用单独导引电动机(图 1)，另一种是以四个拖动点中一点的电动机作为导引电动机(見图 1 注). 現在分别討論这两种情况.

1) 采用单独导引电动机(图 1). 由图 1 知道速度反饋信号是导引电动机轉速与本拖动点电动机的轉速之差，而与其他組电动机轉速无关，所以(6)式中 $\sum_{l=1}^{4}\frac{d\theta_{kl}}{dt}$ 变为 $\frac{d(\theta_k-\theta_0)}{dt}$，同样角度反饋信号也是如此，$\sum_{l=1}^{4}\sin(\gamma\theta_{kl})$ 变为 $\sin(\gamma\theta_k-\gamma\theta_0)$，这里 $\gamma=\frac{1}{nm}$，其中 $n=$ 减速齿輪比，$m=\frac{\text{拖动电动机极对数}}{\text{自整角机极对数}}$.

假定由于存在协調偏差所引起的不平衡負載为

$$\left.\begin{aligned}
M'_{c1}&=\frac{J}{2P}K_g(\theta_1-\theta_4)+\frac{J}{2P}K_h(\theta_2-\theta_3),\\
M'_{c2}&=\frac{J}{2P}K_h(\theta_1-\theta_4)+\frac{J}{2p}K_g(\theta_2-\theta_3),\\
M'_{c3}&=-\frac{J}{2P}K_h(\theta_1-\theta_4)-\frac{J}{2P}K_g(\theta_2-\theta_3),\\
M'_{c4}&=-\frac{J}{2P}K_g(\theta_1-\theta_4)-\frac{J}{2P}K_h(\theta_2-\theta_3).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

于是(6)式中 $\sum_{l=1}^{4} M_{ckl}\theta_{kl}$ 变为 $M'_{ck}(\theta_l)$，所以

$$T_4\frac{d^2\theta_k}{dt^2}+\frac{d\theta_k}{dt}+\frac{G_b(p)}{C_l}\left(\frac{d\theta_k}{dt}-\frac{d\theta_0}{dt}\right)+$$
$$+\frac{G_c(p)}{C_l}\sin(\gamma\theta_k-\gamma\theta_0)-\frac{RM'_{ck}(\theta_l)}{C_M C_l}+\frac{R(M_{ck0}-M_0)}{C_M C_l}=0, \tag{8}$$

式中 M'_{ck} 見(7)式，$k=1,2,3,4$；θ_k 是絕对角，θ_0 可以認为是給定的导引角. 从图 2 得

$$\left.\begin{aligned}
G_b(p)&=\frac{K_2K_3K_5}{(T_2p+1)(T_3p+1)},\\
G_c(p)&=\frac{K_1K_2K_3}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}.
\end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

如将 $G_b(p)$ 及 $G_c(p)$ 代入(8)，則得四个五阶联立方程，应用直接近似求解法[3]可以得到解答，但是比較麻煩. 事实上 $M'_{ck}(\theta_l)$ 是很小，可以忽略不計，这样(8)式中各个方程都独立，可以单独求解.

实际上,我們要研究的不是絕对角而是失調角. 現在让我們将(8)式化为四个拖动点失調角的形式(将其中二式彼此相减即可). 因为假定被拖动物体是一刚体,则 $\theta_{12}=\theta_{34}$, 所以四点拖动实际上只有二个自由度,再加上一个导引电机自由度,共三个自由度,只要三个联立方程即可求解.

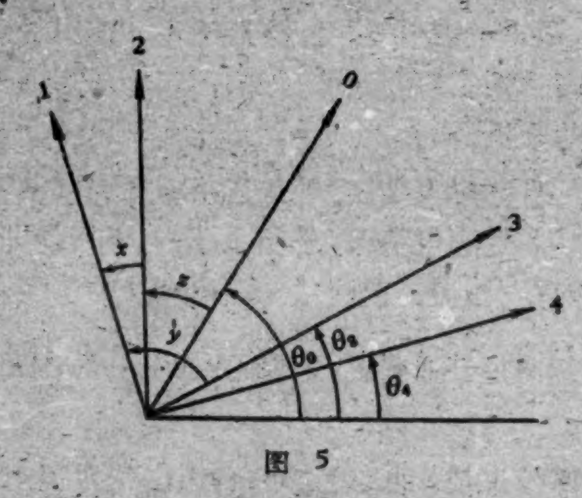


图 5

令 $x=\theta_1-\theta_2$, $y=\theta_1-\theta_3$, $z=\theta_2-\theta_0$, 则

$$\left.\begin{aligned}
&T_4\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\frac{G_b(p)}{C_l}\frac{dx}{dt}+\frac{G_c(p)}{C_l}[\sin(\gamma x+\gamma z)-\sin\gamma z]-\\
&\qquad-T_4(K_g-K_h)x+\frac{R(M_{c10}-M_{c20})}{C_MC_l}=0,\\
&T_4\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+\frac{G_b(p)}{C_l}\frac{dy}{dt}+\frac{G_c(p)}{C_l}[\sin(\gamma x+\gamma z)-\\
&\qquad-\sin(\gamma x-\gamma y+\gamma z)]-T_4(K_g+K_h)y+\frac{R(M_{c10}-M_{c30})}{C_MC_l}=0,\\
&T_4\frac{d^2(x+y)}{dt^2}+\frac{d(x+y)}{dt}+\frac{G_b(p)}{C_l}\frac{d(x+y)}{dt}+\\
&\qquad+\frac{G_c(p)}{C_l}[\sin(\gamma x+\gamma z)-\sin(\gamma z-\gamma y)]-\\
&\qquad-T_4K_g(x+y)-T_4K_h(y-x)+\frac{R(M_{c10}-M_{c40})}{C_MC_l}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

如果导引电动机保持在平衡点,即 $z=\frac{-y-x}{2}$,则系統只有二个自由度,于是(9)式中前二式变为

$$\left.\begin{aligned}
&T_4\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\frac{G_b(p)}{C_l}\frac{dx}{dt}+2\frac{G_c(p)}{C_l}\sin\frac{\gamma x}{2}\cos\frac{\gamma y}{2}+\\
&\qquad+T_4(K_g-K_h)x+\frac{R(M_{c10}-M_{c20})}{C_MC_l}=0,\\
&T_4\frac{d^2y}{dt}+\frac{dy}{dt}+\frac{G_b(p)}{C_l}\frac{dy}{dt}+2\frac{G_c(p)}{C_l}\sin\frac{\gamma y}{2}\cos\frac{\gamma x}{2}-\\
&\qquad-T_4(K_g+K_h)y+\frac{R(M_{c10}-M_{c30})}{C_MC_l}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

上式是非綫性联立方程,可以用直接近似求解法[3]解之.

在小偏差运动中 $\sin\delta=\delta$, $\cos\delta\doteq1$, 则(9)式中前二式变为

$$\left.\begin{aligned}&T_4\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\frac{G_b(p)}{C_l}\frac{dx}{dt}+\frac{\gamma G_c(p)}{C_l}x-\\&\qquad-T_4(K_g-K_h)x+\frac{R(M_{c10}-M_{c20})}{C_MC_l}=0,\\&T_4\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+\frac{G_b(p)}{C_l}\frac{dy}{dt}+\frac{\gamma G_c(p)}{C_l}y-\\&\qquad-T_4(K_g+K_h)y+\frac{R(M_{c10}-M_{c30})}{C_MC_l}=0.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

上式是各自独立的綫性方程，而导引信号不再存在，这就是說无論在动态或稳定的情况下，导引机組对于失調角及稳定性均无影响。

以(8a)代入(11)得

$$\left.\begin{aligned}&a_0\frac{d^5x}{dt^5}+a_1\frac{d^4x}{dt^4}+a_2\frac{d^3x}{dt^3}+a_3\frac{d^2x}{dt^2}+a_4\frac{dx}{dt}+a_5x+a_6=0,\\&b_0\frac{d^5y}{dt^5}+b_1\frac{d^4y}{dt^4}+b_2\frac{d^3y}{dt^3}+b_3\frac{d^2y}{dt^2}+b_4\frac{dy}{dt}+b_5y+b_6=0,\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&a_0=C_lT_1T_2T_3T_4;\\&a_1=C_l[T_1T_2T_3+T_4(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1)];\\&a_2=C_l[T_1T_2+T_1T_3+T_1T_4+T_2T_3+T_2T_4+T_3T_4-\\&\qquad-T_1T_2T_3T_4(K_g-K_h)];\\&a_3=K_2K_3K_5T_1+C_l(T_1+T_2+T_3)+\\&\qquad+C_lT_4-C_lT_4(K_g-K_h)(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1);\\&a_4=K_2K_3K_5+C_l-C_lT_4(T_1+T_2+T_3)(K_g-K_h);\\&a_5=\gamma K_1K_2K_3-C_lT_4(K_g-K_h);\\&a_6=\frac{R}{C_M}(M_{c10}-M_{c20});\\&b_0=a_0;\\&b_1=a_1;\\&b_2=C_l[T_1T_2+T_1T_3+T_1T_4+T_2T_3+T_2T_4+T_3T_4-\\&\qquad-T_1T_2T_3T_4(K_g+K_h)];\\&b_3=K_2K_3K_5T_1+C_l(T_1+T_2+T_3)+C_lT_4-\\&\qquad-C_lT_4(K_g+K_h)(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1);\\&b_4=K_2K_3K_5+C_l-C_lT_4(T_1+T_2+T_3)(K_g+K_h);\\&b_5=\gamma K_1K_2K_3-C_lT_4(K_g+K_h);\\&b_6=\frac{R}{C_M}(M_{c10}-M_{c30}).\end{aligned}\right\}\tag{12a}$$

令(12)式各次导数項等于零，則得在小偏差情况下的稳态解答为

$$\left.\begin{aligned}&x=-\frac{a_6}{a_5}=\frac{R(M_{c20}-M_{c10})}{C_M[\gamma K_1K_2K_3-C_lT_4(K_g-K_h)]};\\&y=-\frac{b_6}{b_5}=\frac{R(M_{c30}-M_{c10})}{C_M[\gamma K_1K_2K_3-C_lT_4(K_g+K_h)]}.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

从(12)式可以看出系統稳定的起碼条件是 i) (K_g+K_h)相当小,不致引起 b_2,b_3,b_5 为負值; ii) a_4 及 $b_4>0$,即

$$K_2K_3K_5+C_l>C_lT_4(T_1+T_2+T_3)(K_g\mp K_h).$$

这就是說,采用速度反饋(上式中出現放大系数 K_5)可以改善大慣性拖动系統(T_4 大)系統的稳定性.

因为这是綫性微分方程,詳細判定稳定的方法,可以引用一般的稳定判据,如饒斯-霍維茨判据,米哈依諾夫判据,奈魁斯特判据等.

如果忽略协调偏差对負荷分配的影响,則 x,y 二式除恆定負荷外,完全相同.

从(13)式可以看出 $\gamma K_1K_2K_3$ 愈大,則稳态失調角愈小.

2) 采用第一拖动点的拖动电动机作为导引电动机(見图 1 注),这样可以省一套控制設备,于是公式(8)变为

$$\left.\begin{aligned}&T_4\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+\frac{d\theta_1}{dt}-\frac{R}{C_MC_l}M'_{c1}(\theta_l)+\frac{R}{C_MC_l}(M_{c10}-M_0)=0,\\&T_4\frac{d^2\theta_k}{dt^2}+\frac{d\theta_k}{dt}+\frac{G_b(p)}{C_l}\left(\frac{d\theta_k}{dt}-\frac{d\theta_1}{dt}\right)+\\&\quad+\frac{G_c(p)}{C_l}\sin(\gamma\theta_k-\gamma\theta_1)-\frac{RM'_{ck}(\theta_l)}{C_MC_l}+\frac{R}{C_MC_l}(M_{ck0}-M_0)=0\\&\qquad(k=2,3,4).\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

同前,令

$$x=\theta_1-\theta_2,\quad y=\theta_1-\theta_3,$$

則得

$$\left.\begin{aligned}&T_4\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\frac{G_b(p)}{C_l}\frac{dx}{dt}+\frac{G_c(p)}{C_l}\sin\gamma x-\\&\quad-T_4(K_g-K_h)x+\frac{R}{C_MC_l}(M_{c10}-M_{c20})=0,\\&T_4\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+\frac{G_b(p)}{C_l}\frac{dy}{dt}+\frac{G_c(p)}{C_l}\sin\gamma y-\\&\quad-T_4(K_g+K_h)y+\frac{R}{C_MC_l}(M_{c10}-M_{c30})=0.\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

上二式完全独立,彼此不相依賴. 如果忽略存在协調偏差时負載不均匀分配的影响,則除最后一項恆定負載外,上面两个式子完全相同.

以(8a)代入(15)式得:

$$\left.\begin{aligned}&a_0\frac{d^5x}{dt^5}+a_1\frac{d^4x}{dt^4}+a_2\frac{d^3x}{dt^3}+a_3\frac{d^2x}{dt^2}+a_4\frac{dx}{dt}+a_5x+a_6\sin\gamma x+a_7=0,\\&b_0\frac{d^5y}{dt^5}+b_1\frac{d^4y}{dt^4}+b_2\frac{d^3y}{dt^3}+b_3\frac{d^2y}{dt^2}+b_4\frac{dy}{dt}+b_5y+b_6\sin\gamma y+b_7=0,\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

式中

$$\begin{aligned}&a_0=C_lT_1T_2T_3T_4;\\&a_1=C_l[T_1T_2T_3+T_4(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1)];\\&a_2=C_l[T_1T_2+T_1T_3+T_1T_4+T_2T_3+T_2T_4+T_3T_4-\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\quad - T_1T_2T_3T_4(K_g - K_h)];\\
&a_3 = K_2K_3K_5T_1 + C_l(T_1 + T_2 + T_3) + C_lT_4 -\\
&\quad - C_lT_4(K_g - K_h)(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1);\\
&a_4 = K_2K_3K_5 + C_l - C_lT_4(T_1 + T_2 + T_3)(K_g - K_h);\\
&a_5 = -C_lT_4(K_g - K_h);\\
&a_6 = K_1K_2K_3;\\
&a_7 = \frac{R}{C_M}(M_{c10} - M_{c20});\\
&b_0 = a_0;\\
&b_1 = a_1;\\
&b_2 = C_l[T_1T_2 + T_1T_3 + T_1T_4 + T_2T_3 + T_2T_4 + T_3T_4 -\\
&\quad - T_1T_2T_3T_4(K_g + K_h)];\\
&b_3 = K_2K_3K_5T_1 + C_l(T_1 + T_2 + T_3) + C_lT_4 -\\
&\quad - C_lT_4(K_g + K_h)(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1);\\
&b_4 = K_2K_3K_5 + C_l - C_lT_4(T_1 + T_2 + T_3)(K_g + K_h);\\
&b_5 = -C_lT_4(K_g + K_h);\\
&b_6 = a_6;\\
&b_7 = \frac{R}{C_M}(M_{c10} - M_{c30}).
\end{aligned}\right\} \quad (16a)
$$

系統在小偏差情况下的运动方程，只要令(16)式中的 $\sin\delta = \delta$ 即可求得，根据上面同样的步驟，可以求得系統的稳态解答． 这样所求得的运动方程及稳态解答与公式(12)及(13)完全相同，因此所得到的結論，也是一样．

3. 自行协調控制系統的分析

現在根据图 3 将(6)式化为相互失調角的形式，这里沒有导引軸，又假定 $\theta_{12} = \theta_{34}$，所以只需二个方程即可求解．

令 $x = \theta_1 - \theta_2$，$y = \theta_1 - \theta_3$，则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{4}(\dot\theta_{1l} - \dot\theta_{2l}) = \dot\theta_{12} + \dot\theta_{13} + \dot\theta_{14} - (\dot\theta_{21} + \dot\theta_{23} + \dot\theta_{24}) =\\
&\quad = \dot x + \dot y + (\dot x + \dot y) - [-\dot x + (\dot y - \dot x) + \dot y] = 4\dot x,\\
&\sum_{l=1}^{4}[\sin(\gamma\theta_{1l}) - \sin(\gamma\theta_{2l})] = \sin\gamma\theta_{12} + \sin\gamma\theta_{13} +\\
&\quad + \sin\gamma\theta_{14} - [\sin\gamma\theta_{21} + \sin\gamma\theta_{23} + \sin\gamma\theta_{24}] =\\
&\quad = 2\sin\gamma x + \sin[\gamma(x + y)] + \sin[\gamma(x - y)] =\\
&\quad = 2[\sin(\gamma x) + \sin(\gamma x)\cos(\gamma y)].
\end{aligned}
$$

于是得

$$
\begin{aligned}
&T_4\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \frac{4G_b(p)}{C_l}\frac{dx}{dt} + \frac{2G_c(p)}{C_l}\times\\
&\times[\sin(\gamma x) + \sin(\gamma x)\cos(\gamma y)] - T_4(K_g - K_h)x +
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{R}{C_M C_l}(M_{c1}-M_{c20})=0. \\ &\text{同样得} \\ &T_4\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+\frac{4G_b(p)}{C_l}\frac{dy}{dt}+\frac{2G_c(p)}{C_l}[\sin(\gamma y)+ \\ &+\sin(\gamma y)\cos(\gamma x)]-T_4(K_g+K_h)y+\frac{R}{C_M C_l}(M_{c10}-M_{c30})=0. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

这里的 $\gamma=\frac{1}{2nm}$，因为从图 3 可以看出，当二自整机相差 180°（电角度）时，信号最大，所以此处 γ 为前一系統中 γ 的二分之一.

从图 4 得

$$\left.\begin{aligned} G_b(p)&=\frac{K_2K_3K_5}{(T_2p+1)(T_3p+1)}, \\ G_c(p)&=\frac{K_1K_2K_3}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

以(18)式代入(17)两式，得

$$\left.\begin{aligned} &a_0\frac{d^5x}{dt^5}+a_1\frac{d^4x}{dt^4}+a_2\frac{d^3x}{dt^3}+a_3\frac{d^2x}{dt^2}+a_4\frac{dx}{dt}+ \\ &\qquad+a_5x+a_6[\sin(\gamma x)+\sin(\gamma x)\cos(\gamma y)]+a_7=0, \\ &b_0\frac{d^5y}{dt^5}+b_1\frac{d^4y}{dt^4}+b_2\frac{d^3y}{dt^3}+b_3\frac{d^2y}{dt^2}+b_4\frac{dy}{dt}+ \\ &\qquad+b_5y+b_6[\sin(\gamma y)+\sin(\gamma y)\cos(\gamma x)]+b_7=0, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} a_0&=C_lT_1T_2T_3T_4; \\ a_1&=C_l[T_1T_2T_3+T_4(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1)]; \\ a_2&=C_l[T_1T_2+T_1T_3+T_1T_4+T_2T_3+T_2T_4+T_3T_4- \\ &\quad -T_1T_2T_3T_4(K_g-K_h)]; \\ a_3&=C_lT_4+C_l(T_1+T_2+T_3)+4K_2K_3K_5T_1- \\ &\quad -C_lT_4(K_g-K_h)(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1); \\ a_4&=C_l+4K_2K_3K_5-C_lT_4(T_1+T_2+T_3)(K_g-K_h); \\ a_5&=-C_lT_4(K_g-K_h); \\ a_6&=2K_1K_2K_3; \\ a_7&=\frac{R}{C_M}(M_{c10}-M_{c20}); \\ b_0&=a_0; \\ b_1&=a_1; \\ b_2&=C_l[T_1T_2+T_1T_3+T_1T_4+T_2T_3+T_2T_4+T_3T_4- \\ &\quad -T_1T_2T_3T_4(K_g+K_h)]; \\ b_3&=C_lT_4+C_l(T_1+T_2+T_3)+4K_2K_3K_5T_1- \\ &\quad -C_lT_4(K_g+K_h)(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1); \\ b_4&=C_l+4K_2K_3K_5-C_lT_4(T_1+T_2+T_3)(K_g+K_h); \\ b_5&=-C_lT_4(K_g+K_h); \end{aligned}\right\} \quad (19a)$$

$$b_6 = a_6;$$
$$b_7 = \frac{R}{C_M}(M_{c10} - M_{c30}).$$

(19)式仍为二个五阶非綫性联立方程，可以应用直接近似法求解．

在小偏差运动时，$\sin\delta = \delta$，$\cos\delta = 1$，则(19)变为下列綫性方程：

$$\left.\begin{aligned} a_0\frac{d^5x}{dt^5} + a_1\frac{d^4x}{dt^4} + a_2\frac{d^3x}{dt^3} + a_3\frac{d^2x}{dt^2} + a_4\frac{dx}{dt} + (a_5 + 2a_6\gamma)x + a_7 = 0,\\ b_0\frac{d^5y}{dt^5} + b_1\frac{d^4y}{dt^4} + b_2\frac{d^3y}{dt^3} + b_3\frac{d^2y}{dt^2} + b_4\frac{dy}{dt} + (b_5 + 2b_6\gamma)y + b_7 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

上式是二个独立方程．

令(20)式各次导数項等于零，则得在小偏差的情况下的稳态解答为

$$\left.\begin{aligned} x = -\frac{a_7}{2a_6\gamma + a_5} = \frac{R(M_{c20} - M_{c10})}{C_M[4\gamma K_1K_2K_3 - C_lT_4(K_g - K_h)]},\\ y = -\frac{b_7}{2\gamma b_6 + b_5} = \frac{R(M_{c30} - M_{c10})}{C_M[4\gamma K_1K_2K_3 - C_lT_4(K_g + K_h)]}.\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

从(20)式可以得到与从(12)式所得的相同的結論(有关系統稳定性問題)．

比較(21)式与(13)式可以看出，在同样不平衡負荷情况下，自行协調控制系統的稳态失調角比导引系統的稳态失調角要小，如果忽略 K_g 及 K_h 并考虑到二者 γ 的定义不同，则前者失調角为后者之半．

如果在自行协調系統中，将每个差动自整角机代以三个普通自整角机(采用变压器状态运轉联接)，这样 γ 也就等于 $\frac{1}{mn}$，与引导协調系統的一样，于是在忽略 K_g 及 K_h 时，前者的稳态誤差仅为后者的四分之一．

4. 系統的比較

根据系統的結构及分析的結果可以得到一些比較論証．

关于单独导引与利用一拖动点作为导引的比較如下：

1）在采用单独导引的系統中，导引訊号出現于一般失調角运动方程(9)中，只是在小偏差时与失調角无关，見(11)．在采用第一拖动点作为导引的系統中，如果失調角包括导引角本身，则导引訊号既出現于一般失調角运动方程(15)中，也出現于小偏差的运动方程中；如果失調角不包括导引角本身（例如 θ_{23}, θ_{34}），則导引訊号就不再出現于运动方程中，而与失調角无关

2）在小偏差运动中，二种导引系統失調角运动方程完全一样，如(12)式，所以它們的稳定条件及解答都相同．

3）单独导引对于拖动物体的稳定及平衡可能有帮助．在利用一拖动点作为导引时，沒有給定的导引信号，不能抑制物体的总体振蕩．

4）单独导引在启动制动时可能不易跟随，因为导引电动机沒有負載，惯性小，容易起动制动；而拖动电动机则否．如利用一拖动点作为导引，则沒有这种困难．

5）利用一拖动点作为导引可以省一套导引設备．

根据以上五条的比較結果，可以知道二个方案各有优缺点，应根据生产机械的具体情

况而选定．在一般情况下，我們訊为利用一拖动点作为导引比采用单独导引較为优越．

下面再来比較导引协調（以利用一拖动点作为导引为依据）与自行协調二种方案的优缺点：

1）导引协調的导引信号对于失調角不发生影响，所以就同步而言，自行协調也是一样完成任务．

2）自行协調比导引协調的控制作用（角度及速度）較強，所以过渡过程較快，稳态失調角較小．

3）自行协調系統失調角 x, y 成为多自由度非綫性运动形式，見(17)或(19)，而导引协調系統則为独立非綫性运动形式，見(15)或(16)．誰对系統品質（特别是稳定性）有利，尙須进一步研究．

4）在小偏差运动时二种系統的失調角都成为独立运动方程，見(20)及(12)．

5）导引协調系統設計分析比自行协調系統較为簡单．

根据以上比較的結果，自行协調系統优越性較多．我国某造紙厂紙机分部传动控制（速度有差系統）已經証明改用"无标准电压的相对速度控制系統"比原来所采用的导引系統优越[1]．

§4. 結　語

这篇报告只就导引协調系統及自行协調系統作了一些分析与比較，初步訊为后一系統的优越性較多，但在实现时可能要困难一些．究竟如何选择系統的結构与参数，需根据具体对象进一步深入研究．关于应用直接近似法求解非綫性联立方程的方法，当方程阶次較高时（事实上如果考虑放大机为二阶，系統采用稳定变压器或其他校正装置与反饋，則方程的次数更高），計算起来比較麻煩，需要用計算机．因此应該研究采用不需要直接求解而能判别系統的稳定性和系統品質的方法．我們希望今后能更深入一步，建立新的更加簡便的方法，以滿足工程技术上的需要．

附录　結构图中几个問題

1. 关于电动机的結构图問題

設发电机的电压为 u_r，升压机的电压为 u_6，电动机負載轉矩为 M_{c2}，忽略电动机电枢回路的电感，就第二台电动机而言，則有

$$u_r + u_6 = IR + C_l \frac{d\theta_2}{dt}, \tag{1}$$

$$C_M I = \frac{J}{P} \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + M_{c2}. \tag{2}$$

由(1)得

$$\left[u_r + u_6 - C_l \frac{d\theta_2}{dt}\right]\frac{1}{R} = I. \tag{3}$$

将(3)代入(2)，得

$$\frac{C_M}{R}\left[u_r + u_6 - C_l \frac{d\theta_2}{dt}\right] = \frac{J}{P} \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + M_{c2},$$

各項除以 $\frac{C_M C_l}{R}$,移項后得

$$\left[\frac{JR}{PC_M C_l}p+1\right]\frac{d\theta_2}{dt}=\frac{\left[u_{\text{Г}}+u_6-\frac{RM_{c2}}{C_M}\right]}{C_l},$$

即

$$\dot{\theta}_2=\left[\frac{K_4}{T_4 p+1}\right]\left(u_{\text{Г}}+u_6-\frac{R}{C_M}M_{c2}\right), \tag{4}$$

其中 $T_4=\frac{JR}{PC_M C_l}=$ 电动机的机电时間常数；$K_4=\frac{1}{C_l}$.

根据(4)式可以繪出电动机的結构图如图 6：

图 6

其中 $u=u_{\text{Г}}-\frac{M_{c2}}{C_M}R$.

2. 关于放大机的結构图及其等效时間常数問題（图 7）

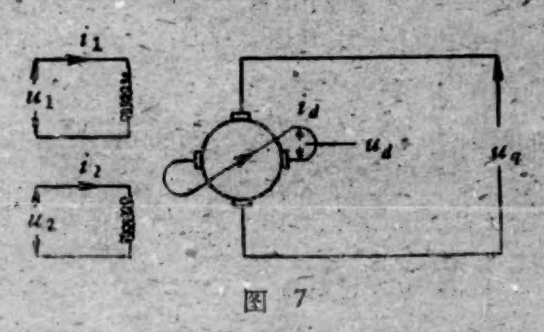


图 7

設放大机只有两个控制繞組（实际上可能还多），加于每个繞組上的电压分別为 u_1, u_2, 并假定放大机完全补偿，于是可列出下列方程：

$$\gamma_1 i_1+L_1 p i_1+M_{12}p i_2=u_1, \tag{5}$$

$$\gamma_2 i_2+L_2 p i_2+M_{21}p i_1=u_2, \tag{6}$$

式中 γ_1, L_1——控制繞組 1 电阻和电感；γ_2, L_2——控制繞組 2 电阻和电感；i_1——繞組 1 的控制电流；i_2——繞組 2 的控制电流；p——$\frac{d}{dt}$；M_{12}, M_{21}——互感系数.

由(5)得

$$i_1+\tau_1 p i_1+\frac{M_{12}}{\gamma_1}p i_2=\frac{u_1}{\gamma_1}, \tag{7}$$

由(6)得

$$i_2+\tau_2 p i_2+\frac{M_{21}}{\gamma_2}p i_1=\frac{u_2}{\gamma_2}, \tag{8}$$

其中 $\tau_1 = \frac{L_1}{\gamma_1}$——控制繞組1的时間常数；$\tau_2 = \frac{L_2}{\gamma_2}$——控制繞組2的时間常数.

假設控制繞組之間沒有漏感，并設控制繞組1的匝数为W_1，控制繞組2的匝数为W_2，则 $M_{12} = \frac{W_1}{W_2}L_2$, $M_{21} = \frac{W_2}{W_1}L_1$，但是

$$M_{12} = M_{21}, \tag{9}$$

以$\frac{W_2}{W_1}$乘(8)式各項和(7)式相加，利用关系(9)，則得：

$$(1 + \tau_\Sigma p)i_\Sigma = \frac{u_1}{\gamma_1} + \frac{W_2}{W_1}\frac{u_2}{\gamma_2}, \tag{10}$$

其中 $\tau_\Sigma = \tau_1 + \tau_2$, $i_\Sigma = i_1 + i_2'$; $i_2' = \frac{W_2}{W_1}i_2$.

設放大机第一級产生的电压 u_d 与控制电流成比例，則

$$u_d = C_1 i_\Sigma,$$

其中 C_1——比例系数.

以(10)式中之 i_Σ 代入，得

$$u_d = \frac{C_1\left(\frac{u_1}{\gamma_1} + \frac{W_2}{W_1}\frac{u_2}{\gamma_2}\right)}{\tau_\Sigma p + 1}. \tag{11}$$

設放大机横軸回路的电阻和电感分别为 γ_d, L_d，則得

$$i_d\gamma_d + L_d p i_d = u_d, \tag{12}$$

其中 i_d——流过横軸回路内的电流.

設放大机第二級产生的輸出电压 u_q 与 i_d 成比例，于是 $u_q = C_{II} i_d$. 以(12)中之 i_d 代入，得

$$u_q = C_{II}\frac{u_d}{\gamma_d + L_d p} = C_{II}'\frac{u_d}{\tau_d p + 1}, \tag{13}$$

其中 $C_{II}' = \frac{C_{II}}{\gamma_d}$, $\tau_d = \frac{L_d}{\gamma_d}$ 横軸回路的时間常数. 根据(11), (13)两式得放大机的結构图如图8:

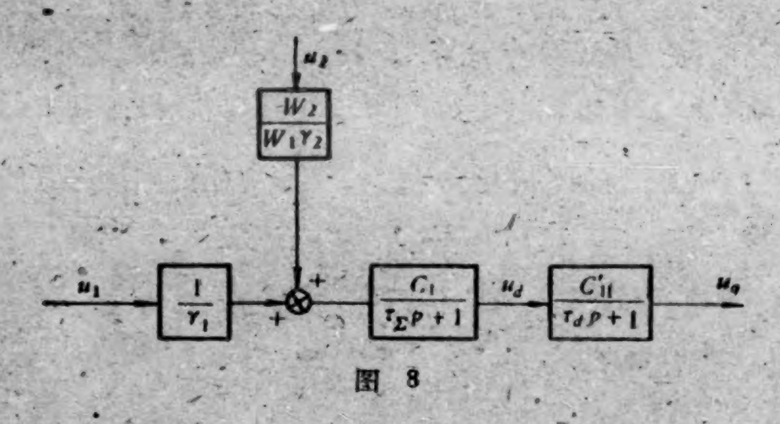


图 8

設放大机两个控制繞組完全一样，則 $W_1 = W_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$，于是上面的結构图8变为图9的形式：

图 9

其中　$C_1' = \frac{C_1}{\gamma_1}$.

如果忽略 p^2 項，則放大机的結构图最后可簡化为图 10 的形式：

图 10

其中　$T_2 = \tau_s + \tau_d$——放大机的等效时間常数；$K_d = C_1'C_{II}'$——放大机的放大系数.

如果放大机多于两个控制繞組，可以按上面同样的步驟，求其等效时間常数.

参　考　文　献

[1] 肖功培，多电机传动造紙机无标准电压的相对速度控制系統，电气传动，7 (1959)，8—11.
[2] 涂序彦，多参数协調控制系統理論(国际自动控制学会第一屆学术大会报告)，1960，莫斯科.
[3] 疏松桂，多台电軸系統的稳定性及非綫性振盪問題(拟在数学学报发表).

数学学报征稿启事

1. 本学报坚决貫彻党的理論联系实际的方針,面向羣众,面向数学工作者,为国内广大讀者服务.
2. 数学学报出版的目的是发表数学研究成果,以利于这些研究成果的交流和推广,以便使这些成果及时为国内有关工作者掌握,在社会主义建設中发揮它的作用.
3. 作者投寄的稿件,需經原单位学术組織(如討論班、教研組、科研小組、技术小組等)討論,并由所属学校或机关厂矿領导审查和推荐.
4. 插图請用白紙黑墨精繪.
5. 論文請附中文摘要,扼要說明主要結果及其在理論上与实际上的意义,以供編輯部参考.
6. 参考文献一律附在文后,并請按下列格式书写:例如:

   [1] 华罗庚,紧致羣上的連續函数所成的空間中的一条收斂定理,科学記录,**2** (1958),341—344.

   [2] 錢学森,工程控制論,科学出版社,北京,1958.

   [3] Шнирельман, Л. Г., Об аддитивных свойствах чисел, *Ростов н/б, Изд. Донск. политехн. ин-та*, **14** (1930), 3—28.

7. 作者有負責精校印稿的义务,投寄本学报的稿請自留底稿,来稿須用方格稿紙謄写清楚,特别是公式、符号、图表必須清楚无誤,并注明作者通信处. 編輯部对来稿有修改权.
8. 凡經本学报登載的稿件酌送稿費,并一律暂代印单行本 20 份,費用在稿費中扣除. 凡不登載的稿件,当寄还作者.
9. 本学报暂在上海(中国科学院上海分院数学研究所及复旦大学)、长春(吉林大学)、天津(南开大学)、武汉(中国科学院武汉分院数学計算所及武汉大学)、厦門(厦門大学)、成都(四川大学)、杭州(杭州大学)、广州(中山大学)設立編輯分部. 作者稿件請挂号寄北京西郊中关村中国科学院数学研究所数学学报編委会或全国各分編輯部收.

数学学报　第11卷　第1期

Acta Mathematica Sinica, Vol. 11, No. 1

（季刊）

編輯者	中国数学会
出版者	科学出版社
印刷者	中国科学院印刷厂
总发行处	北京市邮局
訂购处	全国各地邮电局
代訂另售处	全国各地新华书店 科学出版社各地門市部

（京）报：1—3,060

1961年3月出版
（延至5月出版）

本期定价：报紙本1.50元

本刊代号：报2—502